

Matematika za statistike

Matej Filip

September 2025

Chapter 1

Verjetnost

1.1 Uvod

V vsakdanjem življenju se nenehno srečujemo z negotovostjo in variabilnostjo. Ali bo jutri deževalo? Kakšen bo dobiček podjetja v prihodnjem četrtnem letu? Kakšen je učinek novega zdravila pri zdravljenju določene bolezni? Težave, ki vključujejo negotovost, so v središču zanimanja verjetnostne teorije.

Verjetnost je matematični okvir, ki omogoča analizo naključnih pojavov. Služi kot temelj za statistiko, disciplino, ki omogoča sklepanje na podlagi podatkov. Statistika in verjetnost sta tesno povezani: statistika uporablja orodja verjetnosti, da bi naredila sklepne postopke, medtem ko se verjetnost ukvarja z modeliranjem naključnih poskusov.

V tem poglavju bomo uvedli osnovne pojme verjetnosti. Najprej bomo opisali vzorčne prostore in dogodke, nato pa formalizirali pojmovanje verjetnostnih mer. Kasneje bomo razvili osnovne metode za računanje verjetnosti, ki vključujejo kombinatorične principe, pogojno verjetnost in neodvisnost dogodkov. Na koncu bomo nakazali, kako se te ideje uporabljajo v statistiki in drugih področjih znanosti.

1.2 Vzorčni prostori

Pri obravnavi negotovih pojavov začnemo z natančno določitvijo vseh možnih izidov, ki jih lahko dobimo pri naključnem poskusu. Množico vseh možnih izidov imenujemo *vzorčni prostor* in jo običajno označimo s Ω .

Primer 1.2.1. Če vržemo kovanec, sta možna izida *grb* (G) ali *cifra* (C). Torej je vzorčni prostor $\Omega = \{G, C\}$.

Primer 1.2.2. Če vržemo standardno šeststransko kocko, so možni izidi cela števila od 1 do 6. Torej je vzorčni prostor $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Primer 1.2.3. Če opazujemo čas (v minutah), ki ga potnik čaka na avtobus, je vzorčni prostor $\Omega = [0, \infty)$, ker so možne vse nenegativne realne vrednosti.

Vzorčni prostori so lahko:

- **diskretni**, če je vseh možnih izidov končno ali števno neskončno,
- **zvezni**, če so možni izidi predstavljeni s točkami na realni osi oziroma na uniji intervalov.

Dogodki

Definicija 1.2.4. Dogodek je poljubna podmnožica vzorčnega prostora Ω . Dogodek $A \subseteq \Omega$ se zgodi, če je dejanski izid naključnega poskusa element množice A .

Primer 1.2.5. Pri metu kocke je dogodek »pade sodo število« množica $A = \{2, 4, 6\}$. Če pade 4, rečemo, da je dogodek nastopil.

Operacije na dogodkih

Ker so dogodki množice, lahko z njimi izvajamo običajne množične operacije:

- **Unija:** $A \cup B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A \text{ ali } \omega \in B\}$. To je dogodek, da se zgodi A ali B (ali oba).
- **Presek:** $A \cap B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A \text{ in } \omega \in B\}$. To je dogodek, da se zgodita A in B hkrati.
- **Komplement:** $A^c = \{\omega \in \Omega : \omega \notin A\}$. To je dogodek, da se A ne zgodi.
- **Razlika:** $A \setminus B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A \text{ in } \omega \notin B\}$. To je dogodek, da se zgodi A , a ne B .

Primer 1.2.6. Naj bo $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ pri metu kocke. Če je $A = \{2, 4, 6\}$ (soda števila) in $B = \{1, 2, 3\}$ (števila ≤ 3), potem:

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6\}, \quad A \cap B = \{2\}, \quad A^c = \{1, 3, 5\}, \quad A \setminus B = \{4, 6\}.$$

Posebni dogodki

- Gotov dogodek: $A = \Omega$, ki se vedno zgodi.
- Nemogoč dogodek: $A = \emptyset$, ki se nikoli ne zgodi.
- Elementarni dogodek: $A = \{\omega\}$ vsebuje natanko en izid.

Disjunktni dogodki

Dogodka A in B sta *nezdružljiva* (disjunktna), če je $A \cap B = \emptyset$. Takrat se ne moreta zgoditi hkrati.

Zakoni za množice

Operacije z dogodki zadoščajo naslednjim zakonitostim (za vse dogodke A, B, C):

- **Komutativnost:**

$$A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A.$$

- **Asociativnost:**

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

- **Distributivnost:**

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

De Morganova zakona

Za vsaka dogodka A in B veljata pravili:

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c, \quad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c.$$

Primer 1.2.7. Če A pomeni »pade soda številka«, B pa »pade število večje od 4«, potem $A \cup B$ pomeni »pade soda številka ali številka večja od 4«. Komplement dogodka je »pade liha številka, ki ni večja od 4«, kar je množica $\{1, 3\}$. Po De Morganovem zakonu je to enako kot $A^c \cap B^c$.

1.3 Verjetnost

Ko imamo definiran vzorčni prostor Ω in dogodke kot njegove podmnožice, želimo tem dogodkom prirediti številske vrednosti, ki odražajo njihovo verjetnost. To formaliziramo z uvedbo *verjetnostne preslikave* (ali na kratko verjetnosti).

Definicija 1.3.1. *Verjetnost* je preslikava

$$P : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1],$$

kjer je $\mathcal{F}$ družina podmnožic vzorčnega prostora Ω , za katero veljajo naslednji aksiomi:

1. $P(\Omega) = 1$,
2. Za vsak dogodek $A \in \mathcal{F}$ velja $0 \leq P(A) \leq 1$,
3. Če sta A in B nezdružljiva dogodka ($A \cap B = \emptyset$), potem

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

Izpeljane lastnosti verjetnosti

Iz zgornjih treh aksiomov lahko izpeljemo več uporabnih zakonitosti.

1. Verjetnost nemogočega dogodka. Ker velja $P(\Omega) = 1$ in $\Omega \cup \emptyset = \Omega$, dobimo

$$1 = P(\Omega) = P(\Omega \cup \emptyset) = P(\Omega) + P(\emptyset),$$

od tod $P(\emptyset) = 0$.

2. Komplement dogodka. Za vsak dogodek A velja $\Omega = A \cup A^c$ in $A \cap A^c = \emptyset$. Po aksiomu aditivnosti:

$$P(\Omega) = P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c).$$

Ker je $P(\Omega) = 1$, dobimo

$$P(A^c) = 1 - P(A).$$

3. Monotoničnost. Če je $A \subseteq B$, potem velja $B = A \cup (B \setminus A)$ in $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$. Torej

$$P(B) = P(A) + P(B \setminus A) \geq P(A),$$

saj je $P(B \setminus A) \geq 0$.

4. Formula za unijo dveh dogodkov. Za poljubna A, B velja

$$A \cup B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B),$$

pri čemer so množice na desni paroma disjunktne. Torej

$$P(A \cup B) = P(A \setminus B) + P(B \setminus A) + P(A \cap B).$$

Ker velja $P(A) = P(A \setminus B) + P(A \cap B)$ in $P(B) = P(B \setminus A) + P(A \cap B)$, sledi

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Te lastnosti se uporabljajo pri praktičnem računanju verjetnosti.

Primer 1.3.2 (Klasična definicija). Če je vzorčni prostor končen in so vsi izidi enako verjetni, potem je verjetnost dogodka A enaka

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

Primer 1.3.3 (Statistična definicija). Naj bo poskus ponovljen N -krat in naj se dogodek A pojavijo k -krat. Relativna frekvenca dogodka je

$$\frac{k}{N}.$$

Pri velikem N ta frekvenca približuje verjetnost dogodka $P(A)$.

Primer 1.3.4 (Buffonova igla). Iglo dolžine l mečemo na površino, kjer so narisane vzporedne črte z razdaljo t med seboj ($l < t$). Verjetnost, da igla seka črto, je

$$P = \frac{2l}{t\pi}.$$

Ta klasičen geometrijski poskus je bil uporabljen za ocenjevanje vrednosti števila π .

1.4 Računanje verjetnosti: kombinatorične metode

Pri obravnavi diskretnih vzorčnih prostorov, kjer imajo vsi izidi enako verjetnost, lahko verjetnost dogodka A izračunamo kot

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

Zato je pogosto najpomembnejša naloga prešteti število elementov v Ω in v A . V ta namen uporabljamo osnovna kombinatorična pravila.

1.4.1 Načelo množenja

Če lahko neko opravilo izvedemo v n_1 različnih načinih, drugo v n_2 načinih, in tako naprej do n_k , potem lahko celoten postopek izvedemo na

$$n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k$$

načinov.

Primer 1.4.1. Če lahko za geslo izberemo eno črko (25 možnosti) in eno številko (10 možnosti), potem je vseh gesel $25 \cdot 10 = 250$.

1.4.2 Permutacije in variacije

Permutacija je urejen razpored vseh n elementov. Število vseh permutacij množice n elementov je

$$n! = n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1.$$

Primer 1.4.2. Koliko različnih načinov je, da razporedimo 5 knjig na polico? Odgovor: $5! = 120$.

Če izmed n elementov izberemo k in jih uredimo v vrstnem redu, govorimo o *variacijah* brez ponavljanja:

$$\frac{n!}{(n - k)!}.$$

Primer 1.4.3. Izmed 10 kandidatov želimo izbrati predsednika, podpredsednika in tajnika. Število možnosti je

$$\frac{10!}{7!} = 720.$$

1.4.3 Kombinacije

Če izmed n elementov izberemo k , pri čemer vrstni red ni pomemben, govorimo o kombinacijah. Njihovo število je

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n - k)!}.$$

Primer 1.4.4. Izmed 10 kandidatov želimo izbrati 3 člane odbora, brez razlikovanja po funkcijah. Število možnosti je

$$\binom{10}{3} = 120.$$

1.4.4 Binomski koeficienti in binomska formula

Binomski koeficient $\binom{n}{k}$ ima naravno interpretacijo: število podmnožic z k elementi v n -članski množici.

Izrek 1.4.5 (Binomska formula). *Za vsako naravno število n velja*

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

Dokaz. Razvoj $(x + y)^n$ predstavlja produkt n faktorjev, v vsakem faktorju lahko izberemo x ali y . Če izberemo natanko k -krat x in $(n - k)$ -krat y , dobimo člen $x^k y^{n-k}$. Število vseh takih izbir je $\binom{n}{k}$. Seštevek vseh takih členov da formulo. $\square$

Primer 1.4.6. Za $n = 3$ imamo

$$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3,$$

kar ustreza $\binom{3}{0} = 1$, $\binom{3}{1} = 3$, $\binom{3}{2} = 3$, $\binom{3}{3} = 1$.

Primer 1.4.7 (Hipergeometrijska verjetnost). Naj bo N velikost populacije, od tega je M elementov posebnega tipa (npr. »neustreznih«) in $N - M$ elementov drugega tipa (npr. »ustreznih«). Če naključno vzamemo vzorec velikosti n brez vračanja, je verjetnost, da bo v vzorcu natanko k elementov posebnega tipa, enaka

$$P(X = k) = \frac{\binom{M}{k} \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$

Konkretni primer hipergeometrijske verjetnosti: V pošiljki $N = 100$ artiklov je $M = 10$ neustreznih in 90 ustreznih. Če vzamemo vzorec $n = 5$ artiklov brez vračanja, je verjetnost, da bo natanko $k = 2$ neustrezna, enaka

$$P(X = 2) = \frac{\binom{10}{2} \binom{90}{3}}{\binom{100}{5}}.$$

Tukaj števec predstavlja število načinov, kako izmed 10 neustreznih artiklov izberemo 2, hkrati pa izmed 90 ustreznih še 3, imenovalec pa število vseh možnih vzorcev velikosti 5 izmed 100 artiklov.

1.4.5 Multinomski koeficienti in formula

Število načinov, kako lahko n objektov razdelimo v m razredov, tako da jih je v i -tem razredu natanko k_i ($i = 1, \dots, m$ in $k_1 + \dots + k_m = n$), je dano z multinomskim koeficientom:

$$\binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_m} = \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_m!}.$$

Izrek 1.4.8 (Multinomska formula). *Za vsako naravno število n velja*

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_m)^n = \sum_{k_1 + \dots + k_m = n} \binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_m} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_m^{k_m}.$$

Primer 1.4.9. Za $n = 3$, $m = 3$ imamo

$$(x + y + z)^3 = x^3 + y^3 + z^3 + 3x^2y + 3x^2z + 3y^2x + 3y^2z + 3z^2x + 3z^2y + 6xyz.$$

Primer 1.4.10 (Razdelitev v tri skupine). Naj bo $n = 8$ študentov, ki jih želimo razdeliti v tri skupine: prvi skupini dodelimo $k_1 = 3$ študente, drugi $k_2 = 3$, in tretji $k_3 = 2$. Število vseh možnih razporeditev je

$$\binom{8}{3, 3, 2} = \frac{8!}{3! 3! 2!} = 560.$$

Primer 1.4.11 (Deljenje kart igralcem). Naj imamo 12 kart in 4 igralce. Vsak igralec dobi 3 karte. Število različnih razdelitev je

$$\binom{12}{3, 3, 3, 3} = \frac{12!}{3! 3! 3! 3!} = 369600.$$

Primer 1.4.12 (Barvne kroglice v škatle). Naj imamo 15 kroglic: 6 rdečih, 5 modrih in 4 zelene. Število različnih načinov razvrstitve v tri razrede je

$$\binom{15}{6, 5, 4} = \frac{15!}{6! 5! 4!} = 12612600.$$

1.5 Pogojna verjetnost

Včasih nas zanima verjetnost dogodka pod pogojem, da vemo, da se je zgodil drug dogodek.

Definicija 1.5.1. Naj bosta A in B dogodka v vzorčnem prostoru Ω . *Pogojna verjetnost dogodka B glede na dogodek A je definirana kot*

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, \quad \text{če je } P(A) > 0.$$

Primeri iz vsakdanjega življenja

Primer 1.5.2 (Medicinski test). Če vemo, da je oseba bolna (A), nas zanima verjetnost, da bo test pozitiven (B). Pogojna verjetnost je $P(B|A)$ in jo imenujemo *občutljivost testa*.

Primer 1.5.3 (Prometni zastoj). Verjetnost, da bomo zamudili na sestanek (B), je večja, če vemo, da dežuje (A). Pogojna verjetnost $P(B|A)$ odraža vpliv vremena na zamude.

Primer 1.5.4 (Športna napoved). Verjetnost, da bo ekipa zmagala (B), se spremeni, če vemo, da igra na domačem igrišču (A).

Zakon množenja verjetnosti

Iz definicije sledi pomembna zveza:

$$P(A \cap B) = P(A) P(B|A) = P(B) P(A|B).$$

Ta zakon omogoča računanje presekov verjetnosti preko pogojnih verjetnosti.

Zakon popolne verjetnosti

Naj bo $\{A_1, A_2, \dots, A_k\}$ popoln sistem disjunktnih dogodkov (tj. $A_i \cap A_j = \emptyset$ za $i \neq j$ in $A_1 \cup \dots \cup A_k = \Omega$). Za vsak dogodek B velja

$$P(B) = \sum_{i=1}^k P(B|A_i)P(A_i).$$

Primer 1.5.5 (Medicinski test). V populaciji je 1 % bolnikov (A_1), 99 % zdravih (A_2). Verjetnost pozitivnega testa je

$$P(\text{pozitivni test}) = P(\text{pozitivni}|A_1)P(A_1) + P(\text{pozitivni}|A_2)P(A_2).$$

Bayesovo pravilo

Bayesovo pravilo omogoča obratno pogojno verjetnost:

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_{j=1}^k P(B|A_j)P(A_j)}.$$

Primer 1.5.6 (Diagnoza bolezni). Naj bo $P(A_1) = 0.001$ verjetnost, da je oseba bolna, in $P(A_2) = 0.999$, da je zdrava. Test zazna bolezen s 99-odstotno natančnostjo: $P(\text{pozitivni}|A_1) = 0.99$, pri zdravih pa da pozitiven rezultat z verjetnostjo 0.05: $P(\text{pozitivni}|A_2) = 0.05$.

Če dobimo pozitiven rezultat, velja po Bayesu:

$$P(A_1|\text{pozitivni}) = \frac{0.99 \cdot 0.001}{0.99 \cdot 0.001 + 0.05 \cdot 0.999} \approx 0.019.$$

Torej je kljub pozitivnemu rezultatu verjetnost bolezni le približno 2 %.

Primer 1.5.7 (Detektor dima). V hiši je nameščen detektor dima. Verjetnost, da pride do požara, je $P(A_1) = 0.001$, verjetnost, da ni požara, pa $P(A_2) = 0.999$. Detektor zazna požar s verjetnostjo $P(\text{alarm}|A_1) = 0.98$, vendar sproži lažen alarm z verjetnostjo $P(\text{alarm}|A_2) = 0.02$.

Če slišimo alarm, nas zanima verjetnost, da res gori. Po Bayesovem pravilu:

$$P(A_1|\text{alarm}) = \frac{P(\text{alarm}|A_1)P(A_1)}{P(\text{alarm}|A_1)P(A_1) + P(\text{alarm}|A_2)P(A_2)}.$$

Vstavimo vrednosti:

$$P(A_1|\text{alarm}) = \frac{0.98 \cdot 0.001}{0.98 \cdot 0.001 + 0.02 \cdot 0.999} \approx 0.047.$$

Torej je verjetnost, da res gori, približno 4.7 zelo zanesljiv. Razlog je v tem, da je dejanski dogodek (požar) zelo redek.

Sklep

Pogojna verjetnost, zakon popolne verjetnosti in Bayesovo pravilo so ključni pojmi, ki omogočajo sklepanje v negotovih situacijah, od medicinske diagnostike do zanesljivosti naprav in strojnega učenja.

1.6 Neodvisnost

Pojem neodvisnosti opisuje situacije, ko pojav enega dogodka nima nobenega vpliva na verjetnost drugega.

Definicija 1.6.1. Dogodka A in B sta *neodvisna*, če velja

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Ekivalentno lahko rečemo, da sta A in B neodvisna, če

$$P(B|A) = P(B) \quad \text{ali} \quad P(A|B) = P(A).$$

Primeri iz vsakdanjega življenja

Primer 1.6.2 (Met kovanca in vreme). Dogodek A = »pri metu kovanca pade grb« in dogodek B = »jutri bo dež« sta neodvisna, saj rezultat meta kovanca nima vpliva na vreme.

Primer 1.6.3 (Dve karti iz dveh kompletov). Če iz prvega kompleta kart izžrebamo eno karto in iz drugega kompleta eno karto, sta dogodka »karta iz prvega kompleta je as« in »karta iz drugega kompleta je kralj« neodvisna.

Primer 1.6.4 (Met kovanca dvakrat). Dogodka A = »pri prvem metu pade grb« in B = »pri drugem metu pade grb« sta neodvisna, saj

$$P(A \cap B) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}.$$

Neodvisnost več dogodkov

Dogodki $A_1, A_2, \dots, A_n$ so *medsebojno neodvisni*, če za vsako podmnožico $\{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ indeksov velja

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot P(A_{i_2}) \cdot \dots \cdot P(A_{i_k}).$$

Primer 1.6.5 (Trije meti kovanca). Pri treh zaporednih metih kovanca so dogodki »prvi met je grb«, »drugi met je grb« in »tretji met je grb« medsebojno neodvisni, saj je verjetnost preseka enaka produktu posameznih verjetnosti.

Opozorilo: Neodvisnost $\neq$ disjunktnost

- Če sta A in B *disjunktna* ($A \cap B = \emptyset$), potem velja $P(A \cap B) = 0$. - Če sta hkrati neodvisna, bi morali imeti $P(A \cap B) = P(A)P(B) = 0$. To je možno samo, če je $P(A) = 0$ ali $P(B) = 0$.

Primer 1.6.6. Pri metu kocke naj bo $A = \{1\}$ in $B = \{2\}$. Dogodka sta disjunktna, nista pa neodvisna, ker

$$P(A \cap B) = 0 \neq P(A)P(B) = \frac{1}{36}.$$

Lastnosti neodvisnosti

Če sta A in B neodvisna, potem veljajo:

- A in B^c sta neodvisna,

- A^c in B sta neodvisna,
- A^c in B^c sta neodvisna.

Oris. Če je $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, potem velja

$$P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B) = P(A)(1 - P(B)) = P(A)P(B^c).$$

Podobno se pokaže za ostale primere. □

Sklep

Neodvisnost je ključna lastnost v verjetnostni teoriji in statistiki. Omogoča enostavnejše računanje verjetnosti in je osnova za mnoge modele, npr. pri anketah (neodvisni odgovori), strojnem učenju in teoriji informacij.

1.7 Zaključne opombe

V tem poglavju smo spoznali osnovne pojme verjetnosti: vzorčne prostore, dogodke, verjetnostne mere, kombinatorične metode, pogojno verjetnost in neodvisnost. Ti koncepti tvorijo temelj za celotno teorijo verjetnosti in njihovo poznavanje je ključno za razumevanje statistike.

Statistika gradi na verjetnosti: iz opazovanih podatkov sklepamo o populacijah in procesih, ki so inherentno naključni. Brez osnovnega znanja verjetnosti bi bilo nemogoče oblikovati zanesljive metode sklepanja, ocenjevanja in testiranja hipotez.

V naslednjih poglavjih bomo te ideje razširili na obravnavo slučajnih spremenljivk in njihovih porazdelitev, kar bo omogočilo formalno obravnavo podatkov v kvantitativnih znanstvenih disciplinah.

1.8 Naloge

1. Vržemo dve kocki. Določite verjetnost, da je vsota pik enaka 7.
2. Izmed 20 študentov jih 12 zna programirati v Pythonu. Naključno izberemo 3. Kakšna je verjetnost, da vsi znajo programirati?
3. V podjetju je 40 % zaposlenih žensk. Če naključno izberemo 5 oseb, kakšna je verjetnost, da bodo natanko 3 ženske?
4. V škatli je 6 rdečih in 4 modre kroglice. Izberemo 2. Določite verjetnost, da sta obe rdeči.

5. Dve karti izvlečemo zaporedoma brez vračanja iz kompleta 52 kart. Določite verjetnost, da sta obe asi.
6. V podjetju testirajo nov izdelek. Pretekle izkušnje kažejo, da je 95 % izdelkov uspešnih, če so pri testiranju prejeli dobre ocene, 60 % uspešnih, če so prejeli srednje ocene, in 10 % uspešnih, če so prejeli slabe ocene. Če vemo, da je izdelek pri testiranju prejel dobre ocene, kakšna je verjetnost, da bo uspešen na trgu?
7. Dokazujte, da za poljubna dogodka A in B velja

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

8. V podjetju se 1 % izdelkov izkaže za neustrezne. Če pregledamo 100 izdelkov, ocenite verjetnost, da bo natanko en neustrezen.

Chapter 2

Slučajne spremenljivke

2.1 Diskretne slučajne spremenljivke

Slučajna spremenljivka je v bistvu naključno število. Za motivacijo si pogledajmo primer.

Kovanec vržemo trikrat in opazujemo zaporedje grbov (h) in cifer (t). Vzorčni prostor je

$$\Omega = \{hhh, hht, htt, hth, ttt, tth, thh, tht\}.$$

Primeri slučajnih spremenljivk, definiranih na Ω , so:

1. skupno število grbov,
2. skupno število cifer,
3. število grbov minus število cifer.

Vsaka od teh funkcij določa pravilo, ki vsakemu izidu $\omega \in \Omega$ priredi realno število. Ker je izid v Ω naključen, je tudi prirejeno število naključno.

Definicija 2.1.1. Na splošno je slučajna spremenljivka preslikava iz Ω v realna števila:

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}.$$

Ker je izid naključnega poskusa v Ω naključen, je naključno tudi število $X(\omega)$.

Običajno slučajne spremenljivke označujemo z velikimi črkami iz konca abecede (npr. X, Y, Z).

Primer 2.1.2. Naj bo X skupno število grbov v opisanem poskusu (trikratni met kovanca). Takrat je X slučajna spremenljivka, ki lahko zavzame vrednosti $0, 1, 2, 3$.

Definicija 2.1.3. *Diskretna slučajna spremenljivka* je slučajna spremenljivka, ki lahko zavzame le končno ali kvečjemu števno neskončno mnogo vrednosti.

Primer 2.1.4. Prejšnja slučajna spremenljivka X (skupno število grbov v treh metih) je diskretna, saj so možne vrednosti le $0, 1, 2, 3$.

Za primer slučajne spremenljivke s števno neskončno mnogo možnimi vrednostmi si pogledjmo poskus: kovanec mečemo, dokler ne pade prva grb, in definiramo

$$Y = \text{število metov do prve grbe.}$$

Možne vrednosti so $1, 2, 3, \dots$

Na splošno pravimo, da je množica števno neskončna, če jo lahko postavimo v bijektivno korespondenco z množico celih števil.

Primer 2.1.5. Če je kovanec pošten, ima vsak izid iz Ω zgoraj verjetnost $\frac{1}{8}$. Tako lahko izračunamo:

$$P(X = 0) = \frac{1}{8}, \quad P(X = 1) = \frac{3}{8}, \quad P(X = 2) = \frac{3}{8}, \quad P(X = 3) = \frac{1}{8}.$$

Na splošno verjetnostna preslikava na vzorčnem prostoru določa verjetnosti različnih vrednosti slučajne spremenljivke. Če so možne vrednosti $x_1, x_2, \dots$, potem obstaja funkcija p , da velja

$$p(x_i) = P(X = x_i), \quad \sum_i p(x_i) = 1.$$

Funkcija p se imenuje *gostota* (tudi *frekvenčna funkcija*) slučajne spremenljivke X .

Definicija 2.1.6. *Porazdelitvena funkcija* (cdf) slučajne spremenljivke X je definirana kot

$$F(x) = P(X \leq x), \quad -\infty < x < \infty.$$

Porazdelitvena funkcija je naraščajoča in zadošča pogoju

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1.$$

Primer 2.1.7. Za slučajno spremenljivko X (število grbov v treh metih poštenega kovanca) je $p(x)$ podan z

$$p(0) = \frac{1}{8}, \quad p(1) = \frac{3}{8}, \quad p(2) = \frac{3}{8}, \quad p(3) = \frac{1}{8}.$$

Porazdelitvena funkcija $F(x)$ ima skoke v točkah $x = 0, 1, 2, 3$, višina skoka pri $x = i$ pa je enaka $p(i)$.

Neodvisne slučajne spremenljivke

Tako kot govorimo o neodvisnosti dogodkov, lahko definiramo tudi neodvisnost slučajnih spremenljivk.

Definicija 2.1.8. Slučajni spremenljivki X in Y sta *neodvisni*, če velja

$$P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i) P(Y = y_j) \quad \text{za vse } i, j.$$

Primer 2.1.9 (Dva meta kovanca). Naj bo $X = 1$, če je pri prvem metu grb (in 0 sicer), ter $Y = 1$, če je pri drugem metu grb (in 0 sicer). Potem je

$$P(X = 1, Y = 1) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2},$$

in podobno za vse ostale kombinacije. Torej sta X in Y neodvisni.

Primer 2.1.10 (Met kovanca trikrat). Naj bo $X =$ »število grbov v prvih dveh metih«, $Y =$ »število grbov v zadnjih dveh metih«, pri treh metih poštenega kovanca.

Možne vrednosti so $X \in \{0, 1, 2\}$ in $Y \in \{0, 1, 2\}$. Skupno vzorčni prostor vsebuje $2^3 = 8$ enako verjetnih izidov.

Izračunajmo nekaj verjetnosti:

$$P(X = 2) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}, \quad P(Y = 2) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}.$$

Toda

$$P(X = 2, Y = 2) = P(\text{prvi dve grb in zadnji dve grb}) = P(\text{hhh}) = \frac{1}{8}.$$

Če bi bila X in Y neodvisni, bi morale veljati

$$P(X = 2, Y = 2) = P(X = 2) P(Y = 2) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}.$$

Ker pa v resnici velja $P(X = 2, Y = 2) = \frac{1}{8} \neq \frac{1}{16}$, spremenljivki X in Y nista neodvisni.

2.1.1 Bernoullijeve slučajne spremenljivke

Definicija 2.1.11. *Bernoullijev poskus* je poskus, ki ima samo dva možna izida: *uspeh* in *neuspeh*.

Primer 2.1.12. Met kovanca: uspeh = pade grb, neuspeh = pade cifra.
Test bolezn: uspeh = pozitiven test, neuspeh = negativen test.

Definicija 2.1.13. *Bernoullijeva slučajna spremenljivka* X je definirana kot

$$X = \begin{cases} 1, & \text{če nastopi uspeh,} \\ 0, & \text{če nastopi neuspeh.} \end{cases}$$

Če je $p = P(X = 1)$ verjetnost uspeha, potem velja

$$P(X = 0) = 1 - p, \quad P(X = 1) = p.$$

Primer 2.1.14. Če je verjetnost, da bo test pravilno zaznal bolezen $p = 0.98$, potem je Bernoullijeva spremenljivka $X = 1$, če je test pozitiven, in $X = 0$, če je negativen. Tedaj je $P(X = 1) = 0.98$, $P(X = 0) = 0.02$.

2.1.2 Binomske slučajne spremenljivke

Zaporedje n neodvisnih Bernoullijevih poskusov z verjetnostjo uspeha p pripelje do števila uspehov X v teh n poskusih.

Definicija 2.1.15. *Binomska slučajna spremenljivka* X s parametri n in p ima verjetnostno maso

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Primer 2.1.16 (Spol otrok). Verjetnost, da se rodi fant, je približno $p = 0.515$. V družini s petimi otroki naj bo X število fantov. Potem

$$P(X = 3) = \binom{5}{3} 0.515^3 0.485^2 \approx 0.321,$$

$$P(X = 5) = \binom{5}{5} 0.515^5 \approx 0.036.$$

Povezava z Bernoullijevimi spremenljivkami. Naključno spremenljivko z binomsko porazdelitvijo lahko izrazimo kot vsoto n neodvisnih Bernoullijevih spremenljivk. Če označimo $X_i \sim \text{Bern}(p)$, $i = 1, \dots, n$, neodvisne in vsaka predstavlja izid enega poskusa, potem velja

$$X = X_1 + X_2 + \dots + X_n \sim \text{Bin}(n, p).$$

Ta povezava je ključna, saj omogoča razumevanje binomske porazdelitve kot seštevka preprostih poskusov tipa »uspeh/neuspeh«.

2.1.3 Geometrijska porazdelitev

Definicija 2.1.17. Naj bo poskus sestavljen iz neodvisnih Bernoullijevih poskusov, pri čemer ima vsak poskus le dva možna izida in verjetnost uspeha p je enaka v vseh poskusih. Naključno spremenljivko X , ki je enaka številu poskusov do prvega uspešnega poskusa, imenujemo *geometrijska naključna spremenljivka*.

Definicija 2.1.18. Gostota geometrijske spremenljivke je

$$P(X = x) = (1 - p)^{x-1}p, \quad x = 1, 2, \dots$$

Primer 2.1.19. Pri digitalnem prenosu signala je verjetnost, da je signal slab, $p = 0.1$. Naj bo X število prenosov do prvega slabega signala.

$$P(X = 1) = 0.1, \quad P(X = 10) = 0.99^9 \cdot 0.1 \approx 0.0387, \quad P(X = 20) = 0.99^{19} \cdot 0.1 \approx 0.0135.$$

Pričakovana vrednost diskretne slučajne spremenljivke

Definicija 2.1.20. Če je X diskretna slučajna spremenljivka z gostoto $p(x)$, je njena pričakovana vrednost, označena z $E(X)$, definirana kot

$$E(X) = \sum_i x_i p(x_i),$$

pod pogojem, da velja

$$\sum_i |x_i| p(x_i) < \infty.$$

Vsote bomo podrobneje študirali v prihodnjem poglavju. Prav tako bomo spoznali še nakaj drugih zelo pomembnih diskretnih slučajnih spremenljivk, kot so negativna binomska, hipergeometrijska in Poissonova.

2.2 Zvezne slučajne spremenljivke

Pri zveznih slučajnih spremenljivkah vlogo frekvenčne funkcije prevzame *gostota verjetnosti* (ali na kratko *gostota*) $f(x)$, za katero velja:

$$f(x) \geq 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1.$$

Če je X zvezna slučajna spremenljivka z gostoto f , potem za poljubna $a < b$:

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x) dx.$$

Porazdelitvena funkcija. Za zvezno slučajno spremenljivko X definiramo porazdelitveno funkcijo

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(u) du.$$

Če je f zvezna v x , potem velja $f(x) = F'(x)$, kar bomo še dokazali.

Enakomerna slučajna spremenljivka. Enakomerna slučajna spremenljivka na intervalu $[0, 1]$ ima gostoto

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{sicer,} \end{cases}$$

in porazdelitveno funkcijo

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 1, & x \geq 1. \end{cases}$$

Normalna porazdelitvena funkcija Slučajna spremenljivka X ima *normalno porazdelitev* s parametri μ in σ^2 , če je njena gostota verjetnosti

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right), \quad -\infty < x < \infty,$$

kjer je $\mu \in \mathbb{R}$ lokacijski parameter (sredina) in $\sigma^2 > 0$ disperzijski parameter (varianca).

V prihodnjih poglavjih bomo spoznali še nekatere druge zvezne slučajne spremenljivke.

Kvantil, mediana in kvartili.

Definicija 2.2.1. Naj bo X zvezna slučajna spremenljivka s porazdelitveno funkcijo F . Za $0 < p < 1$ imenujemo p -ti kvantil število x_p , za katero velja

$$P(X \leq x_p) = F(x_p) = p.$$

Če je F strogo naraščajoča, je kvantil enolično določen kot

$$x_p = F^{-1}(p).$$

Posebni primeri kvantilov:

$x_{0.5}$ je *mediana*, $x_{0.25}$ je *spodnji kvartil*, $x_{0.75}$ je *zgornji kvartil*.

Primer 2.2.2. Naj bo porazdelitvena funkcija

$$F(x) = x^2, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Inverzna funkcija je $F^{-1}(y) = \sqrt{y}$. Sledi:

$$\text{mediana} = x_{0.5} = F^{-1}(0.5) = \sqrt{0.5} \approx 0.707,$$

$$\text{spodnji kvartil} = x_{0.25} = F^{-1}(0.25) = \sqrt{0.25} = 0.50,$$

$$\text{zgornji kvartil} = x_{0.75} = F^{-1}(0.75) = \sqrt{0.75} \approx 0.866.$$

Pričakovana vrednost zvezne slučajne spremenljivke

Definicija 2.2.3. Če je X zvezna slučajna spremenljivka z gostoto $f(x)$, potem je njena pričakovana vrednost

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) dx,$$

pod pogojem, da velja

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|f(x) dx < \infty.$$

Integrale bomo podrobneje študirali v prihodnjih poglavjih.

Varianca slučajne spremenljivke

Definicija 2.2.4. Če je X slučajna spremenljivka s pričakovano vrednostjo $E(X)$, potem je varianca spremenljivke X definirana kot

$$\text{Var}(X) = E[(X - E(X))^2],$$

pod pogojem, da pričakovana vrednost obstaja. Standardni odklon spremenljivke X je kvadratni koren variance.

Chapter 3

Zaporedja in vrste

Zaporedja

Definicija 3.0.1. *Zaporedje realnih števil* je predpis, ki vsakemu naravnemu številu $n \in \mathbb{N}$ priredi realno število a_n . Realno število a_n imenujemo n -ti člen zaporedja, n pa *indeks* člena a_n . Zaporedje zapišemo kot $a_1, a_2, a_3, \dots$ ali krajše $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ oziroma $\{a_n\}$.

Opomba 3.0.2. Zaporedje lahko določimo eksplicitno (s predpisom za splošni člen a_n) ali rekurzivno (s predpisom, ki izrazi a_n z nekaj predhodnimi členi $a_{n-1}, a_{n-2}, \dots$). Člene zaporedja je pogosto nazorno predstaviti kot točke (n, a_n) v ravnini ali kot točke a_n na številski premici.

Primer 3.0.3.

- Aritmetično zaporedje: $a_{n+1} = a_n + d$ in $a_n = a_1 + (n-1)d$.
- Geometrično zaporedje: $a_{n+1} = q a_n$ in $a_n = a_1 q^{n-1}$.
- Fibonacci: $a_1 = 1, a_2 = 1, a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$.

Monotonost in omejenost

Definicija 3.0.4. Zaporedje $\{a_n\}$ je *naraščajoče*, če $a_{n+1} \geq a_n$ za vsak $n \in \mathbb{N}$, in *strogo naraščajoče*, če $a_{n+1} > a_n$. Podobno je *padajoče*, če $a_{n+1} \leq a_n$, in *strogo padajoče*, če $a_{n+1} < a_n$. Zaporedje je *monotono*, če je naraščajoče ali padajoče.

Definicija 3.0.5. Zaporedje $\{a_n\}$ je *navzgor omejeno*, če obstaja $M \in \mathbb{R}$ tako, da $a_n \leq M$ za vse n ; število M je (ena) *zgornja meja*. *Navzdol omejeno*

je, če obstaja $m \in \mathbb{R}$ tako, da $a_n \geq m$ za vse n ; m je (ena) *spodnja meja*. Zaporedje je *omejeno*, če je hkrati navzgor in navzdol omejeno.

Definicija 3.0.6. *Natančna zgornja meja* (supremum) zaporedja je $\sup_{n \in \mathbb{N}} a_n$, najmanjša med vsemi njegovimi zgornjimi mejami. *Natančna spodnja meja* (infimum) je $\inf_{n \in \mathbb{N}} a_n$, največja med vsemi spodnjimi mejami.

Primer 3.0.7. Za $a_n = \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$ je $\inf_n a_n = 1$, zaporedje je strogo padajoče in $\sup_n a_n = a_1 = 2$.

Alternirajoča zaporedja

Definicija 3.0.8. Zaporedje je *alternirajoče*, če se predznak členov izmenjuje, tj. $a_n a_{n+1} < 0$ za vsak n .

Stekališča in limita

Definicija 3.0.9 (Stekališče). Število $A \in \mathbb{R}$ je *stekališče* zaporedja $\{a_n\}$, če za vsak $\varepsilon > 0$ leži v $(A - \varepsilon, A + \varepsilon)$ neskončno mnogo členov zaporedja.

Definicija 3.0.10 (Limita). Število A je *limita* zaporedja $\{a_n\}$, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $n_0 \in \mathbb{N}$ tako, da za vse $n > n_0$ velja $|a_n - A| < \varepsilon$. V tem primeru pišemo $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ in pravimo, da je zaporedje *konvergentno*. Če takega A ni, je zaporedje *divergentno*.

Trditev 3.0.11. Če $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$, potem je A stekališče zaporedja in zunaj vsake okolice $(A - \varepsilon, A + \varepsilon)$ leži le končno mnogo členov.

Izrek 3.0.12. Zaporedje je konvergentno natanko tedaj, ko je omejeno in ima natanko eno stekališče.

Izrek 3.0.13 (Monotono konvergenčni izrek). Če je $\{a_n\}$ naraščajoče in omejeno, potem konvergira in velja $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup_n a_n$. Če je $\{a_n\}$ padajoče in omejeno, potem konvergira in velja $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf_n a_n$.

Primer 3.0.14. Zaporedje

$$a_n = 2n + 1, \quad n \in \mathbb{N},$$

ima člene $3, 5, 7, 9, \dots$. To je strogo naraščajoče zaporedje, ki ni navzgor omejeno. Njegova natančna spodnja meja je

$$\inf_{n \in \mathbb{N}} a_n = 3.$$

Primer 3.0.15. Zaporedje

$$a_n = \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N},$$

je strogo padajoče in navzdol omejeno z 0. Velja

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 = \inf_{n \in \mathbb{N}} a_n,$$

torej je limita enaka natančni spodnji meji.

Primer 3.0.16. Zaporedje

$$a_n = (-1)^n, \quad n \in \mathbb{N},$$

je alternirajoče. Ni monotono in nima limite, ker se členi zaporedja gibljejo med 1 in -1 . Ima pa dve stekališči: -1 in 1 .

Računanje z limitami

Trditev 3.0.17. Če sta $\{a_n\}$ in $\{b_n\}$ konvergentni, potem veljajo standardna pravila:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} b_n, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (c a_n) = c \lim_{n \rightarrow \infty} a_n, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = (\lim_{n \rightarrow \infty} a_n)(\lim_{n \rightarrow \infty} b_n).$$

Če je $b_n \neq 0$ za vse n in $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0$, potem $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}$.

Primer 3.0.18.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n-1)^2 + 1}{(2n+1)(n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 - 4n + 2}{2n^2 + 3n + 1} = \frac{4}{2} = 2.$$

Nekaj standardnih limit

Trditev 3.0.19. Za $c \in \mathbb{R}$ velja

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c^n = \begin{cases} 0, & |c| < 1, \\ 1, & c = 1, \end{cases}.$$

Trditev 3.0.20. Za $c > 0$ velja $\lim_{n \rightarrow \infty} c^{1/n} = 1$.

Število e

Definicija 3.0.21. Definiramo zaporedji $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ in $b_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n}$. Velja, da je a_n naraščajoče in navzgor omejeno, b_n padajoče in navzdol omejeno, zato sta konvergentni in imata isto limito:

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n} \approx 2,7182.$$

Število e je iracionalno.

Številске vrste

Definicija 3.0.22. Dano imamo neko zaporedje realnih števil

$$a_1, a_2, a_3, \dots$$

Kaj bi bila vsota neskončno členov tega zaporedja?

Primer 3.0.23. Naj bo zaporedje dano s predpisom $a_n = n$. Koliko je

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots?$$

Primer 3.0.24. Naj bo zaporedje dano s predpisom $a_n = (-1)^n$. Koliko je

$$-1 + 1 + (-1) + 1 + (-1) + 1 + (-1) + \dots?$$

Primer 3.0.25.

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 2$$

Definicija 3.0.26. Naj bo $\{a_n\}$ zaporedje realnih števil. Izraz

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

imenujemo *številska vrsta*, število a_n pa *splošni člen vrste*.

Definicija 3.0.27. S pomočjo členov zaporedja $\{a_n\}$ definiramo novo zaporedje delnih vsot $\{s_n\}$ s členi

$$s_1 = a_1, \quad s_2 = a_1 + a_2, \quad \dots, \quad s_n = \sum_{i=1}^n a_i, \quad \dots$$

Definicija 3.0.28. Vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je *konvergentna*, če konvergira zaporedje njenih delnih vsot $\{s_n\}$. Limito zaporedja delnih vsot imenujemo *vsota vrste*. Če vrsta ni konvergentna, pravimo, da je *divergentna*.

Primer 3.0.29. Preverimo konvergenco vrste

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n.$$

Ker je $s_n = 0$ za sode n in $s_n = -1$ za lihe n , ima zaporedje delnih vsot dve stekališči, torej ni konvergentno in je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ divergentna.

Primer 3.0.30. Izračunajmo vsoto vrste

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}.$$

Ker velja

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1},$$

so delne vsote enake

$$s_n = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Torej

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 1,$$

in vrsta je konvergentna z vsoto 1.

Definicija 3.0.31. Vrsto

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = a + aq + aq^2 + aq^3 + \dots$$

imenujemo *geometrijska vrsta*.

Trditev 3.0.32. Če je $q \neq 1$, potem je

$$s_n = \sum_{i=0}^n aq^i = a \cdot \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Za $|q| < 1$ je

$$\sum_{i=0}^{\infty} aq^i = \frac{a}{1 - q}.$$

Za $|q| \geq 1$ je *geometrijska vrsta divergentna*.

Primer 3.0.33. Izračunajmo vsoto vrste

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3 \cdot 2^n}.$$

Izrek 3.0.34 (Cauchyjev kriterij). *Vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentna natanko tedaj, ko za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $n_0 \in \mathbb{N}$, da za vsak $n > n_0$ in vsak $k \in \mathbb{N}$ velja*

$$|s_{n+k} - s_n| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+k}| < \varepsilon.$$

Izrek 3.0.35. *Potreben, ne pa tudi zadosten, pogoj za konvergenco vrste $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

Definicija 3.0.36. Vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

se imenuje *harmonična vrsta*.

Trditev 3.0.37. *Harmonična vrsta je divergentna.*

Opomba 3.0.38. Pri harmonični vrsti je $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$, vendar vrsta ni konvergentna. Pogoj $\lim a_n = 0$ torej ni zadosten za konvergenco vrste.

Izrek 3.0.39 (Primerjalni kriterij). *Naj za vrsti $\sum a_n$ in $\sum b_n$ velja $0 < a_n \leq b_n$ za vsak $n \in \mathbb{N}$.*

- Če je $\sum b_n$ konvergentna, potem je tudi $\sum a_n$ konvergentna.
- Če je $\sum a_n$ divergentna, potem je tudi $\sum b_n$ divergentna.

Izrek 3.0.40 (Kvocietni kriterij). *Naj bo $\sum a_n$ vrsta s pozitivnimi členi, in naj obstaja*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q.$$

- Če je $q < 1$, potem je vrsta konvergentna.
- Če je $q > 1$, potem je vrsta divergentna.
- Če je $q = 1$, kriterij odpove.

Izrek 3.0.41 (Korenski kriterij). Naj bo $\sum a_n$ vrsta s pozitivnimi členi in naj obstaja

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q.$$

- Če je $q < 1$, potem je vrsta konvergentna.
- Če je $q > 1$, potem je vrsta divergentna.
- Če je $q = 1$, kriterij odpove.

Definicija 3.0.42. Vrsta $\sum a_n$ je *absolutno konvergentna*, če je konvergentna vrsta $\sum |a_n|$. Vrsta $\sum a_n$ je *pogojno konvergentna*, če je konvergentna, ni pa absolutno konvergentna.

Izrek 3.0.43. Vsaka absolutno konvergentna vrsta je konvergentna.

Definicija 3.0.44. Vrsta $\sum a_n$ je *alternirajoča*, če velja $a_n a_{n+1} < 0$ za vsak $n \in \mathbb{N}$.

Izrek 3.0.45 (Leibnitzov kriterij). Če je pri alternirajoči vrsti $\sum a_n$ zaporedje absolutnih vrednosti $\{|a_n|\}$ padajoče proti 0, potem je vrsta konvergentna.

Primer 3.0.46. Preverimo konvergentnost vrste

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

Ker velja $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ in $\frac{1}{n}$ monotonno pada, je vrsta konvergentna (pogojno).

Diskretne porazdelitve: normalizacija in matematično upanje

V tem poglavju normalizacija pomeni preverjanje, da se verjetnostna funkcija (gostota) dejansko sešteje v 1. To je osnovni pogoj, saj mora vsota vseh verjetnosti (pri diskretni spremenljivki) oziroma integral gostote (pri zvezni spremenljivki) enaka 1, ker se mora dogodek z gotovostjo zgoditi v vzorčnem prostoru.

Bernoullijeva porazdelitev $\text{Bern}(p)$ *Gostota:*

$$f(x) = \begin{cases} p, & x = 1, \\ 1 - p, & x = 0, \end{cases} \quad 0 < p < 1.$$

Normalizacija:

$$\sum_{x \in \{0,1\}} f(x) = (1 - p) + p = 1.$$

Pričakovana vrednost:

$$E(X) = \sum_{x \in \{0,1\}} x f(x) = 0 \cdot (1 - p) + 1 \cdot p = p.$$

Opomba: Bernoullijeva porazdelitev je poseben primer binomske porazdelitve s parametroma $n = 1$ in p .

Diskretna enakomerna porazdelitev

Definicija 3.0.47. Naj bo $A = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ končna množica različnih realnih števil. Slučajna spremenljivka X , ki zavzame vrednost vsakega x_i z enako verjetnostjo $\frac{1}{n}$, se imenuje *diskretno enakomerno porazdeljena*. Njena porazdelitvena funkcija je

$$P(X = x_i) = \frac{1}{n}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Opomba 3.0.48. Normalizacija je očitna, saj velja

$$\sum_{i=1}^n P(X = x_i) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} = 1.$$

Primer 3.0.49. Met pravične kocke: X predstavlja število pik na vrženi kocki. Potem

$$P(X = k) = \frac{1}{6}, \quad k = 1, 2, 3, 4, 5, 6.$$

Trditev 3.0.50 (Matematično upanje). *Za enakomerno porazdeljeno slučajno spremenljivko X na $\{x_1, \dots, x_n\}$ je*

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

Če so vrednosti $1, 2, \dots, n$, potem velja

$$E(X) = \frac{1}{n}(1 + 2 + \dots + n) = \frac{n+1}{2},$$

kar doka"zemo z indukcijo.

Primer 3.0.51. Za met kocke je pričakovano število pik

$$E(X) = \frac{1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6}{6} = 3.5.$$

Binomska porazdelitev $\text{Bin}(n, p)$

Gostota:

$$f(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Normalizacija (binomski izrek):

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = (p + (1-p))^n = 1.$$

Pričakovano vrednost:

$$E(X) = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Opazimo identiteto $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$. Vstavimo:

$$E(X) = np \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} (1-p)^{(n-1)-(k-1)}.$$

Zamenjajmo indeks $j = k - 1$:

$$E(X) = np \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} p^j (1-p)^{(n-1)-j}.$$

Ta vsota je $(p + (1-p))^{n-1} = 1$, torej

$$E(X) = np.$$

Geometrijska porazdelitev $\text{Geom}(p)$

Gostota:

$$f(k) = (1-p)^{k-1} p, \quad k = 1, 2, \dots$$

Normalizacija (geometrijska vrsta):

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{k-1} p = p \sum_{m=0}^{\infty} (1-p)^m = \frac{p}{1 - (1-p)} = 1.$$

Pričakovano vrednost:

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1}p.$$

Opazimo, da je $\sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1}$ odvod po spremenljivki p od geometrijske vrste $\sum_{k=0}^{\infty} -(1-p)^k = -\frac{1}{1-(1-p)} = -\frac{1}{p}$. Ta odvod pa je enak

$$\frac{1}{p^2}$$

in tako dobimo

$$E(X) = p \cdot \frac{1}{p^2} = \frac{1}{p}.$$

Chapter 4

Funkcije, odvodi in integrali

Grafi in osnovne lastnosti

Definicija 4.0.1. Graf funkcije $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, je množica

$$\Gamma(f) = \{(x, f(x)) : x \in D\} \subseteq \mathbb{R}^2.$$

Trditev 4.0.2. Funkcija $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ je injektivna natanko tedaj, ko vsaka premica vzporedna z abscisno osjo seka njen graf največ enkrat.

Trditev 4.0.3. Funkcija $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ je surjektivna natanko tedaj, ko vsaka premica vzporedna z abscisno osjo seka njen graf vsaj enkrat.

Definicija 4.0.4. Funkcija $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ je

- *soda*, če $f(-x) = f(x)$ za vsak $x \in D$, njen graf pa je simetričen glede na ordinatno os;
- *liha*, če $f(-x) = -f(x)$ za vsak $x \in D$, njen graf pa je simetričen glede na izhodišče.

Opomba 4.0.5. Večina funkcij ni ne lihih ne sodih.

Primer 4.0.6. Funkcija $f(x) = x^2$ je soda, saj velja $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$. Njen graf (parabola) je simetričen glede na ordinatno os.

Primer 4.0.7. Funkcija $f(x) = x^3$ je liha, saj $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$. Njen graf je simetričen glede na koordinatno izhodišče.

Primer 4.0.8. Funkcija $f(x) = x^2 + x$ ni niti soda niti liha. Za $f(-x) = (-x)^2 + (-x) = x^2 - x$, kar ni enako ne $f(x)$ ne $-f(x)$.

Primer 4.0.9. Funkcija $f(x) = \cos(x)$ je soda, ker $\cos(-x) = \cos(x)$. Funkcija $f(x) = \sin(x)$ pa je liha, saj $\sin(-x) = -\sin(x)$.

Monotone in omejene funkcije

Definicija 4.0.10. Funkcija $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, je

- *naraščajoča*, če $f(x_1) \leq f(x_2)$ za vse $x_1 < x_2$ iz D ,
- *strogo naraščajoča*, če $f(x_1) < f(x_2)$ za vse $x_1 < x_2$,
- *padajoča*, če $f(x_1) \geq f(x_2)$ za vse $x_1 < x_2$,
- *strogo padajoča*, če $f(x_1) > f(x_2)$ za vse $x_1 < x_2$.

Funkcija je *monotona*, če je naraščajoča ali padajoča.

Definicija 4.0.11. Funkcija $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ je *navzgor omejena*, če obstaja $M \in \mathbb{R}$, da je $f(x) \leq M$ za vsak $x \in D$. Število M imenujemo *zgornja meja*.

Podobno je *navzdol omejena*, če obstaja $m \in \mathbb{R}$, da je $f(x) \geq m$ za vsak $x \in D$.

Funkcija je *omejena*, če je hkrati navzgor in navzdol omejena.

Primer 4.0.12. Funkcija $f(x) = \arctan(x)$ je strogo naraščajoča, navzgor omejena z $\frac{\pi}{2}$ in navzdol omejena z $-\frac{\pi}{2}$.

—

Inverzne funkcije

Definicija 4.0.13. Naj bo $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, injektivna funkcija. Potem obstaja *inverzna funkcija* $f^{-1} : f(D) \rightarrow D$, ki zadošča pogoju

$$f^{-1}(f(x)) = x, \quad x \in D.$$

Primer 4.0.14. Če je $f(x) = 2x + 3$, potem dobimo $y = 2x + 3$, od tod $x = \frac{y-3}{2}$. Zato je inverzna funkcija $f^{-1}(y) = \frac{y-3}{2}$.

Opomba 4.0.15. Graf inverzne funkcije f^{-1} dobimo tako, da graf funkcije f prezrcalimo čez simetralo lihih kvadrantov $y = x$.

—

Polinomi in racionalne funkcije

Definicija 4.0.16. Polinom stopnje n je funkcija oblike

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0.$$

Definicijsko območje polinoma je celotna množica $\mathbb{R}$.

Izrek 4.0.17 (Osnovni izrek algebre). *Polinom stopnje n ima natanko n kompleksnih ničel, pri čemer so nekatere lahko večkratne.*

Primer 4.0.18. Polinom $p(x) = -x^3 + 3x + 2$ ima ničle $x = -2$, $x = 1$ in $x = ?$. Ker je polinom tretje stopnje, ima natanko tri realne ničle.

Definicija 4.0.19. *Racionalna funkcija* je funkcija oblike

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)},$$

kjer sta p in q polinoma in $q(x) \neq 0$. Definicijsko območje racionalne funkcije je $\mathbb{R} \setminus \{x : q(x) = 0\}$.

Primer 4.0.20. Funkcija

$$f(x) = \frac{x^2(x+1)}{x^2-4}$$

ima ničle pri $x = 0$ in $x = -1$, pole pa pri $x = \pm 2$.

Ekspontentne in logaritemske funkcije

Definicija 4.0.21. Za $a > 0$, $a \neq 1$, je *eksponentna funkcija*

$$f(x) = a^x.$$

Najpogosteje uporabljamo osnovo e , tj. $f(x) = e^x$.

Opomba 4.0.22. Eksponentna funkcija je strogo monotona: za $a > 1$ narašča, za $0 < a < 1$ pada. Zaloga vrednosti je vedno $(0, \infty)$.

Definicija 4.0.23. *Logaritemska funkcija* je inverzna eksponentni funkciji $x \mapsto a^x$ in jo označimo

$$f(x) = \log_a(x), \quad x > 0.$$

Za osnovo $a = e$ dobimo *naravni logaritem* $f(x) = \log x$.

Primer 4.0.24. Velja $\log_a(1) = 0$, $\log_a(a) = 1$. Na primer, $\log_2(8) = 3$.

Trigonometrične funkcije funkcije

Definicija 4.0.25. Osnovne *trigonometrične funkcije* so sinus, kosinus, tangens in kotangens. Njihovo definicijsko območje razširimo na vsa realna števila, razen tam, kjer so imenovalci enaki 0.

Primer 4.0.26. Velja identiteta $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, pa tudi $\tan^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}$.

Definicija 4.0.27. Inverzne trigonometrične funkcije imenujemo *ciklometrične funkcije*:

$$\arcsin, \quad \arccos, \quad \arctan.$$

Definirane so na ustreznih intervalih, kjer so sinus, kosinus in tangens injektivni.

—

Limita in zveznost

Definicija 4.0.28. Naj bo $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$. Število A je *limita funkcije* f v točki x_0 , če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$, da je

$$|f(x) - A| < \varepsilon \quad \text{za vsak } x \in D, x \neq x_0, \text{ ko } |x - x_0| < \delta.$$

Zapišemo

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A.$$

Opomba 4.0.29. Limita funkcije v točki x_0 ni nujno odvisna od vrednosti $f(x_0)$. Možno je, da

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0), \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0), \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \text{ obstaja, a } f(x_0) \text{ ni definirana.}$$

Definicija 4.0.30. Funkcija $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ je *zvezna v točki* x_0 , če velja

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Trditev 4.0.31. Če je $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna in $f(a)f(b) < 0$, potem obstaja $x_0 \in [a, b]$, da je $f(x_0) = 0$.

Primer 4.0.32. Funkcija $f(x) = x^3 - x$ je zvezna na $[-2, 2]$. Ker $f(-2) = -6$ in $f(2) = 6$, iz izreka sledi, da obstaja $x_0 \in [-2, 2]$, kjer je $f(x_0) = 0$ (ničla pri $x = 0$).

Odvod

Definicija in motivacija

Pri proučevanju funkcij nas zanima, kako se funkcija spreminja: ali njene vrednosti naraščajo, padajo, in kako hitre so te spremembe. Hitrost spreminjanja funkcije $f(x)$ v odvisnosti od spremenljivke x opredelimo s pomočjo odvoda.

Naj bo $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ in $x_0 \in (a, b)$. Ko se vrednost spremenljivke poveča iz x_0 na $x_0 + h$, se vrednost funkcije spremeni za

$$f(x_0 + h) - f(x_0).$$

Kvocien

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

imenujemo *diferencialni kvocien*. To je smerni koeficient premice skozi točki $(x_0, f(x_0))$ in $(x_0 + h, f(x_0 + h))$.

Definicija 4.0.33. Če obstaja limita

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

pravimo, da je f odvedljiva v x_0 , število $f'(x_0)$ pa je njen *odvod*.

Primer 4.0.34. Izračunajmo po definiciji odvod $f(x) = x^2 + x$:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 + (x+h) - (x^2 + x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h + 1) = 2x + 1.$$

Primer 4.0.35. Za $f(x) = x^x$ ($x > 0$) zapišemo $f(x) = e^{x \log x}$. Potem po verižnem pravilu

$$f'(x) = x^x (\log x + 1).$$

Tangenta

Definicija 4.0.36. Premico skozi $(x_0, f(x_0))$ s smernim koeficientom $f'(x_0)$ imenujemo *tangenta* na graf funkcije f v tej točki.

Primer 4.0.37. Za $f(x) = x^2$ in $x_0 = 1$ je $f'(1) = 2$. Tangenta v točki $(1, 1)$ je $y = 2(x - 1) + 1 = 2x - 1$.

Pravila za odvajanje

- $(c)' = 0, \quad (cf)' = cf'.$
- $(f + g)' = f' + g'.$
- $(fg)' = f'g + fg'.$
- $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2},$ če $g \neq 0.$
- $(f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g'.$

Primer 4.0.38. Odvajajmo $f(x) = \sin(x^2)$. Notranja funkcija je $g(x) = x^2$, zunanja $h(u) = \sin u$.

$$f'(x) = h'(g(x))g'(x) = \cos(x^2) \cdot 2x = 2x \cos(x^2).$$

Primer 4.0.39. Naj bo $f(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$. Potem

$$f'(x) = \frac{2x(x-1) - (x^2+1)}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2}.$$

—

Tabela odvodov

$$(x^r)' = rx^{r-1}, \quad (e^x)' = e^x, \quad (a^x)' = a^x \log a, \quad (\log x)' = \frac{1}{x}, \quad (\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x.$$

Primer 4.0.40. Izračunajmo

$$\frac{d}{dx}(\log(\sin x)) = \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x = \cot x,$$

kjer je $x \in (0, \pi)$.

—

Ekstremi in stacionarne točke

Definicija 4.0.41. Če je $f'(x_0) = 0$, pravimo, da je x_0 *stacionarna točka*.

Izrek 4.0.42 (Fermatov). Če ima f v x_0 lokalni ekstrem, potem je $f'(x_0) = 0$.

Primer 4.0.43. Naj bo $f(x) = 2x^2 - 4x + 5$. Potem $f'(x) = 4x - 4 = 0$ za $x = 1$, $f''(1) = 4 > 0$, torej ima f tam lokalni minimum $f(1) = 3$.

Primer 4.0.44. Za $f(x) = x^3 - 3x$ velja $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$. Stacionarne točke so $x = \pm 1$. Ker je $f''(-1) = -6 < 0$, je v -1 maksimum, ker pa $f''(1) = 6 > 0$, je v 1 minimum.

L'Hospitalovo pravilo

Izrek 4.0.45. Če $\lim_{x \rightarrow a} \frac{u(x)}{v(x)}$ vodi v obliko $\frac{0}{0}$ ali $\frac{\infty}{\infty}$, potem

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{u(x)}{v(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{u'(x)}{v'(x)},$$

če desna limita obstaja.

Primer 4.0.46.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1.$$

Primer 4.0.47.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1/x}{1} = 0.$$

Integrali

Nedoločeni integral

Doslej smo znali za dano funkcijo f izračunati njen odvod f' . Sedaj se vprašamo: katero funkcijo moramo odvajati, da bi dobili f ?

Definicija 4.0.48. Naj bo $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$. Funkcijo $F : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, za katero velja

$$F'(x) = f(x) \quad \text{za vsak } x \in (a, b),$$

imenujemo *nedoločeni integral* funkcije f . Označimo:

$$F(x) = \int f(x) dx.$$

Izrek 4.0.49. Če je F nedoločeni integral funkcije f , potem je tudi $F + C$ nedoločeni integral funkcije f za poljubno konstanto $C \in \mathbb{R}$. Vsak nedoločeni integral funkcije f je take oblike.

Primer 4.0.50.

$$\int 2x dx = x^2 + C, \quad \int \cos x dx = \sin x + C.$$

Tabela osnovnih integralov

$$\begin{aligned}\int x^n dx &= \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1), & \int \frac{1}{x} dx &= \log |x| + C, \\ \int e^x dx &= e^x + C, & \int a^x dx &= \frac{a^x}{\log a} + C, \quad a > 0, a \neq 1, \\ \int \sin x dx &= -\cos x + C, & \int \cos x dx &= \sin x + C.\end{aligned}$$

Primer 4.0.51.

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C, \quad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C.$$

Pravila za integriranje

- $\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx.$
- $\int k f(x) dx = k \int f(x) dx.$
- (*Menjava spremenljivke*) Če je $x = x(t)$ odvedljiva funkcija, potem

$$\int f(x) dx = \int f(x(t)) x'(t) dt.$$

- (*Integracija po delih*) Če sta u, v odvedljivi funkciji, potem

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

Primer 4.0.52 (Menjava spremenljivke).

$$\int 2x \cos(x^2) dx, \quad u = x^2, \quad du = 2x dx \Rightarrow \int \cos u du = \sin u + C = \sin(x^2) + C.$$

Primer 4.0.53 (Integracija po delih).

$$\int x e^x dx, \quad u = x, \quad dv = e^x dx.$$

Dobimo $du = dx$, $v = e^x$, zato

$$\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = (x-1)e^x + C.$$

Določeni integral

Definicija 4.0.54. Naj bo $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna funkcija. Potem definiramo

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\max \delta_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}),$$

kjer je $a = x_0 < \dots < x_n = b$ delitev intervala in $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$.

Izrek 4.0.55. Če je f zvezna na $[a, b]$, potem je f integrabilna.

Primer 4.0.56.

$$\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

Lastnosti določenega integrala

- $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx.$
- $\int_a^a f(x) dx = 0.$
- $\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.$
- Če $f(x) \leq g(x)$ na $[a, b]$, potem $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$

Izrek 4.0.57 (Izrek o povprečni vrednosti). Če je f zvezna na $[a, b]$, potem obstaja $\xi \in [a, b]$, da

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

Primer 4.0.58.

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin x dx = \frac{2}{\pi}.$$

Torej obstaja $\xi \in [0, \pi]$, kjer $\sin \xi = \frac{2}{\pi}$.

Osnovni izrek analize

Izrek 4.0.59. Naj bo $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna. Potem je

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

odvedljiva in velja $F'(x) = f(x)$.

Izrek 4.0.60 (Newton–Leibnitzova formula). Če je G nedoločeni integral funkcije f , potem

$$\int_a^b f(x) dx = G(b) - G(a).$$

Primer 4.0.61.

$$\int_0^{\pi/2} \cos x dx = \sin x \Big|_0^{\pi/2} = 1.$$

Posplošeni integrali

Če f ni omejena ali interval ni končen, integral razumemo kot limito.

Primer 4.0.62.

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_1^M \frac{1}{x^2} dx = \lim_{M \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{x} \Big|_1^M \right) = 1.$$

Primer 4.0.63.

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(2\sqrt{x} \Big|_\varepsilon^1 \right) = 2.$$

Uporabe določenega integrala

- Ploškovina pod grafom:

$$P = \int_a^b f(x) dx.$$

- Ploškovina med grafoma:

$$P = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx, \quad f(x) \geq g(x).$$

- Dolžina loka:

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Primer 4.0.64 (Ploškovina med grafoma).

$$\int_0^1 (x^2 - x) dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6}.$$

Ploškovina je $\frac{1}{6}$.

Primer 4.0.65 (Dolžina loka). Za $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ na $[0, 1]$ je

$$s = \int_0^1 \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = \int_0^1 \sqrt{1 + x^2} dx.$$

Zapišemo

$$\int \sqrt{1 + x^2} dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{1 + x^2} + \log(x + \sqrt{1 + x^2})) + C.$$

Chapter 5

Uporaba funckij, odvoda in integrala v statistiki

Negativna binomska $\text{NegBin}(r, p)$

Gostota:

$$f(x) = \binom{x-1}{r-1} (1-p)^{x-r} p^r, \quad x = r, r+1, \dots$$

Normalizacija:

$$\sum_{x=r}^{\infty} \binom{x-1}{r-1} (1-p)^{x-r} p^r = p^r \sum_{m=0}^{\infty} \binom{m+r-1}{r-1} (1-p)^m.$$

To je znana potenčna vrsta:

$$\sum_{m=0}^{\infty} \binom{m+r-1}{r-1} q^m = \frac{1}{(1-q)^r}, \quad |q| < 1.$$

Za $q = 1 - p$ dobimo

$$p^r \cdot \frac{1}{(1 - (1-p))^r} = p^r \cdot \frac{1}{p^r} = 1.$$

Pričakovano vrednost:

$$E(X) = \frac{r}{p}.$$

To lahko vidimo na dva načina:

- kot vsoto r neodvisnih geometrijskih spremenljivk (linearizacija upanja),
- ali z direktno uporabo vrste in identitete za $\sum_x x \binom{x-1}{r-1} (1-p)^{x-r}$.

Hipergeometrijska $\text{Hyp}(N, K, n)$ *Gostota:*

$$f(x) = \frac{\binom{K}{x} \binom{N-K}{n-x}}{\binom{N}{n}}, \quad x = \max\{0, n - (N - K)\}, \dots, \min\{K, n\}.$$

To porazdelitev že srečali pri

Normalizacija:

$$\sum_x \binom{K}{x} \binom{N-K}{n-x} = \binom{N}{n} \Rightarrow \sum_x f(x) = 1.$$

Pričakovano vrednost: Vsak izmed n izbranih elementov ima verjetnost $\frac{K}{N}$, da je "slab". Z uporabo indikatorjev dobimo

$$E(X) = n \frac{K}{N}.$$

Poissonova porazdelitev $\text{Pois}(\lambda)$ *Gostota:*

$$f(x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

Normalizacija:

$$\sum_{x=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = 1.$$

Pričakovano vrednost:

$$E(X) = \sum_{x=0}^{\infty} x e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}.$$

Pišemo $x \frac{\lambda^x}{x!} = \lambda \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!}$ in dobimo

$$E(X) = e^{-\lambda} \lambda \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!} = e^{-\lambda} \lambda \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!} = e^{-\lambda} \lambda e^{\lambda} = \lambda.$$

Tukaj pride se vse zvezne in varianca

Chapter 6

Funkcije dveh spremenljivk

Definicija in osnovni primeri

Definicija 6.0.1. Realna funkcija dveh spremenljivk je preslikava

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad D \subseteq \mathbb{R}^2,$$

ki vsaki točki $(x, y) \in D$ priredi realno število $f(x, y)$.

Primer 6.0.2. Vsaki točki na Zemlji priredimo zemljepisno dolžino in širino. Preslikava f , ki vsaki točki priredi nadmorsko višino, je funkcija dveh spremenljivk.

Primer 6.0.3. Digitalna slika (grayscale) je funkcija $f(x, y)$, ki vsakemu piksu priredi vrednost v intervalu $[0, 1]$, kjer 0 pomeni črno in 1 belo.

Primer 6.0.4. Površina pravokotnega pločevinastega kosa je funkcija $f(a, b) = ab$, kjer a in b predstavljata dolžino in širino pločevine.

Graf in izočrte

Definicija 6.0.5. Graf funkcije $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$, je množica

$$\Gamma(f) = \{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in D\} \subseteq \mathbb{R}^3,$$

kar predstavlja ploskev v prostoru.

Definicija 6.0.6. Izocrte funkcije $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ so krivulje v D , kjer je $f(x, y) = c$ za neko konstanto c .

Primer 6.0.7. Za $f(x, y) = x^2 + y^2$ so izočrte koncentrične krožnice.

Primer 6.0.8. Za $f(x, y) = x - y$ so izočrte vzporedne premice oblike $x - y = c$.

Zveznost

Definicija 6.0.9. Funkcija $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$, je zvezna v točki $(x_0, y_0) \in D$, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$, da velja

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon \quad \text{če je } \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta.$$

Parcialni odvodi

Definicija 6.0.10. Parcialni odvod funkcije $f(x, y)$ po x v točki (x, y) je

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h}.$$

Podobno po y :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y + h) - f(x, y)}{h}.$$

Primer 6.0.11. Za $f(x, y) = \log(x + xy + y^2)$ dobimo

$$f_x(x, y) = \frac{1 + y}{x + xy + y^2}, \quad f_y(x, y) = \frac{x + 2y}{x + xy + y^2}.$$

Primer 6.0.12. Če $f(x, y) = x^2y + y^3$, potem

$$f_x = 2xy, \quad f_y = x^2 + 3y^2.$$

Diferencial

Definicija 6.0.13. Če je f diferenciable v (a, b) , potem velja

$$f(a + h, b + k) = f(a, b) + f_x(a, b)h + f_y(a, b)k + o(\sqrt{h^2 + k^2}).$$

Linearna aproksimacija

$$df = f_x(a, b) dx + f_y(a, b) dy$$

opisuje tangentno ravnino grafa f v (a, b) .

Verižni zakon

Naj bo $z = z(u, v)$, kjer $u = u(x, y)$ in $v = v(x, y)$. Potem

$$z_x = z_u u_x + z_v v_x, \quad z_y = z_u u_y + z_v v_y.$$

Primer 6.0.14. Naj bo $z = u^2 \log v$, $u = \frac{x}{y}$, $v = xy$. Potem

$$z_x = 2u \log v \cdot u_x + \frac{u^2}{v} \cdot v_x.$$

Višji odvodi in Hessejeva matrika

Definicija 6.0.15. Za $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$, so parcialni odvodi drugega reda:

$$f_{xx}, f_{yy}, f_{xy}, f_{yx}.$$

Matrika

$$H(x, y) = \begin{bmatrix} f_{xx}(x, y) & f_{xy}(x, y) \\ f_{yx}(x, y) & f_{yy}(x, y) \end{bmatrix}$$

se imenuje *Hessejeva matrika*.

Primer 6.0.16. Za $f(x, y) = \frac{xy^2 - 1}{x^2 + 1}$ v $(1, 0)$ izračunamo Hessejevo matriko

$$H(1, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ekstremi funkcij dveh spremenljivk

Definicija 6.0.17. Točka (a, b) je *stacionarna*, če $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$.

Izrek 6.0.18. Če je $\det H(a, b) > 0$ in $f_{xx}(a, b) > 0$, je v (a, b) lokalni minimum. Če je $\det H(a, b) > 0$ in $f_{xx}(a, b) < 0$, je lokalni maksimum. Če je $\det H(a, b) < 0$, je (a, b) sedlo.

Primer 6.0.19. Naj bo $f(x, y) = 2x^2 + y - 2xy - 3x - 3$. Rešimo $f_x = f_y = 0$:

$$f_x = 4x - 2y - 3 = 0, \quad f_y = 1 - 2x = 0 \Rightarrow (x, y) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right).$$

Vezani ekstremi in metoda Lagrangevih multiplikatorjev

Definicija 6.0.20. Za ekstrem funkcije $f(x, y)$ pod pogojem $g(x, y) = 0$ definiramo

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y).$$

Stacionarne točke F so kandidati za vezane ekstreme.

Primer 6.0.21. Naj bo $f(x, y) = x + 2y$, $g(x, y) = x^2 + y^2 - 5 = 0$. Potem

$$F(x, y, \lambda) = x + 2y + \lambda(x^2 + y^2 - 5).$$

Izračunamo $\partial_x F = \partial_y F = \partial_\lambda F = 0$ in dobimo kandidate.

—

Dvojni integrali

Definicija 6.0.22. Za $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$, je dvojni integral

$$\iint_D f(x, y) \, dx dy = \lim_{p(D_k) \rightarrow 0} \sum_k f(x_k, y_k) p(D_k).$$

Če je $D = \{(x, y) : a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq h(x)\}$, potem

$$\iint_D f(x, y) \, dx dy = \int_a^b \left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) \, dy \right) dx.$$

Primer 6.0.23.

$$\iint_{[0,1] \times [0,1]} xy \, dx dy = \int_0^1 \left(\int_0^1 xy \, dy \right) dx = \int_0^1 \frac{x}{2} \, dx = \frac{1}{4}.$$