UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA ELEKTROTEHNIKO

Matej Filip

# REŠENE NALOGE IZ IZPITOV PRI PREDMETU MATEMATIKA 2 UNIVERZITETNI ŠTUDIJ

Študijsko gradivo

Ljubljana, 2025

# UVOD

Naloge na naslednjih straneh so bile na pisnih izpitih v študijskih letih 2021/22–2022/25 pri predmetu Matematika 2, ki je obvezni predmet za študente, vpisane na univerzitetni dodiplomski študijski program Elektrotehnika, na Univerzi v Ljubljani.

# IZPIT iz MATEMATIKE II
## Univerzitetni študij

1. september 2025

Prve tri naloge so standardnega tipa in vredne vsaka 25 točk. Zadnjih pet nalog je izbirnega tipa, pri čemer je pravilen natanko en odgovor, ki prinese 5 točk, nepravilen pa minus 1 točko. Neodgovorjena naloga prinese 0 točk, obkrožen več kot en odgovor pa minus 1 točko. Odgovorite tako, da obkrožite črko pred pravilnim odgovorom.

1. [25T] Določite vse realne lastne vrednosti matrike

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

in določite lastni vektor, ki pripada največji lastni vrednosti.

**Rešitev.** Karakteristični polinom dobimo iz

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\big((2-\lambda)^2-1\big)-(2-\lambda) = (2-\lambda)\big((2-\lambda)^2-2\big).$$

Ničle tega polinoma so

$$\lambda_1 = 2+\sqrt{2}, \qquad \lambda_2 = 2, \qquad \lambda_3 = 2-\sqrt{2},$$

torej ima $A$ tri različne realne lastne vrednosti.

Največja lastna vrednost je $\lambda_{\max} = 2+\sqrt{2}$. Za pripadajoči lastni vektor $v = (x,y,z)^\top$ rešimo $(A-\lambda_{\max} I)v = 0$, tj.

$$\begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Iz prve vrstice dobimo $-\sqrt{2}\,x+y=0$, torej $y=\sqrt{2}\,x$. Iz druge vrstice sledi $x-\sqrt{2}\,y+z=0 \;\Rightarrow\; x-2x+z=0 \;\Rightarrow\; z=x$. Tretja vrsta je odvisna od prvih dveh. Izberemo $x=1$ in dobimo lastni vektor

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2. [25T] Poiščite rešitev diferencialne enačbe
$$xy' - y = x^3 \sin(x^2).$$

**Rešitev.** Začetno diferencialno enačbo delimo z $x$ in najprej poiščemo rešitev homogenega dela
$$y' - \frac{y}{x} = 0.$$
Dobimo
$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad y_h = Cx.$$
Z variacijo konstante vzamemo $y_p = x\,C(x)$. Tedaj
$$y_p' - \frac{y_p}{x} = (C + xC') - \frac{1}{x}(xC) = x\,C'(x),$$
zato iz $y' - \frac{y}{x} = x^2 \sin(x^2)$ sledi
$$x\,C'(x) = x^2 \sin(x^2) \quad \Rightarrow \quad C'(x) = x \sin(x^2).$$
Integriramo s substitucijo $u = x^2$, $du = 2x\,dx$ (torej $x\,dx = \frac{1}{2}\,du$):
$$C(x) = \int x \sin(x^2)\,dx = \frac{1}{2}\int \sin u\,du = -\frac{1}{2}\cos u + C_0 = -\frac{1}{2}\cos(x^2) + C_0.$$
Za partikularno rešitev lahko vzamemo $C_0 = 0$, torej
$$y_p = -\frac{x}{2}\cos(x^2).$$
Splošna rešitev je
$$\boxed{y(x) = Cx - \frac{x}{2}\cos(x^2).}$$

3. [25T] Površje hribovja opisuje funkcija dveh spremenljivk
$$f(x, y) = x^4 - x^2 + y^4 - y^2 + 2.$$

Planinsko društvo bi rado postavilo planinske koče na vsaj sedla. V katerih točkah se bodo točke nahajale. Koliko je največja in najmanjša višina hribovja.

**Rešitev.** Izračunamo
$$f_x = 4x^3 - 2x = 2x(2x^2 - 1), \qquad f_y = 4y^3 - 2y = 2y(2y^2 - 1).$$
Pogoj $f_x = f_y = 0$ nam da
$$x \in \left\{0, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}, \qquad y \in \left\{0, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right\},$$

torej je skupaj 9 kritičnih točk.

Hessejeva matrika je enaka

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2-2 & 0 \\ 0 & 12y^2-2 \end{pmatrix}.$$

**Klasifikacija.**

- Pri $(0,0)$ imamo *lokalni maksimum*, z $f(0,0)=2$.
- Pri $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ imamo *lokalni (dejansko globalni) minimum*, z vrednostjo
$$f\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}.$$
- Pri točkah $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ in $\left(0, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ imamo *sedlo.*

4. [5T] Koliko je rešitev diferencialne enačbe
$$y'' + 4y' + 4y = 0$$
z danimi začetnimi pogoji $y(0) = 0$ in $y'(0) = 1$?

   a) $e^{-2x}$ b) $-2e^{-2x}$ c) $-2xe^{x}$ d) $\underline{xe^{-2x}}$ e) $-2e^{x}$

5. [5T] Koliko je rang matrike
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}?$$

   a) 0 b) 1 c) 2 d) $\underline{3}$ e) 4

6. [5T] Katero izmed spodnjih števil leži v območju konvergence potenčne vrste
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}(x+1)^n\,?$$

   a) $-5$ b) $-4$ c) $\underline{0}$ d) 2 e) 4 f) 5

7. [5T] Koliko mora biti konstanta $a$, da bodo točke $A(0,1,2)$, $B(1,3,0)$, $C(a,2,1)$ in $D(2,7,-1)$ ležale na isti ravnini?

   a) $-2$ b) $-1$ c) 0 d) $\underline{\frac{1}{2}}$ e) 2

8. [5T] Katera izmed spodnjih točk je stacionarna točka funkcije
$$f(x,y) = \ln\bigl(3x + xy + y^2\bigr)\,?$$

   a) $(0,1)$ b) $(1,-1)$ c) $(2,-1)$ d) $(3,-2)$ e) $\underline{(6,-3)}$

# IZPIT iz MATEMATIKE II
## Univerzitetni študij

24. junij 2025

Prve tri naloge so standardnega tipa in vredne vsaka 25 točk. Zadnjih pet nalog je izbirnega tipa, pri čemer je pravilen natanko en odgovor, ki prinese 5 točk, nepravilen pa minus 1 točko. Neodgovorjena naloga prinese 0 točk, obkrožen več kot en odgovor pa minus 1 točko. Odgovorite tako, da obkrožite črko pred pravilnim odgovorom.

1. [25T]

   Poiščite rešitev diferencialne enačbe

   $$xy' - y = x^2(x-1)\ln(x+1).$$

   Rešitev: Začetno diferencialno enačbo delimo z $x$ in najprej poiščemo rešitev homogenega dela

   $$y' - \frac{y}{x} = 0$$

   in dobimo $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$ in po integriranju dobimo rešitev $y_h = xC$. Z variacijo konstante dobimo partikularno rešitev $y_p = xC(x)$. Izraz $y_p' - \frac{y_p}{x} = x\ln(x+1)$ se poenostavi v

   $$C'(x) = (x-1)\ln(x+1),$$

   torej $C(x) = \int(x-1)\ln(x+1)dx$, integracija per partes nam da

   $$\int (x-1)\log(x+1)\,dx = \left(\frac{x^2}{2} - x - \frac{3}{2}\right)\log|x+1| - \frac{x^2}{4} + \frac{3x}{2} + C\,.$$

2. [25T] Izračunajte lastne vrednosti matrike

   $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

   in določite nek lastni vektor, ki ne pripada realni lastni vrednosti.

   Rešitev: Lastne vrednosti so 1, $-1 \pm i$, lastna vektorja od $-1 \pm i$ sta $(-1, -i, 1), (-1, i, 1)$.

3. [25T]

Želimo zgraditi posodo v obliki valja brez pokrova, tako da bo posoda imela največjo prostornino pri fiksni površini $6\pi$. Koliko sta polmer in višina dobljene posode.

Rešitev: Volumen valja je

$$V = \pi r^2 h,$$

površina valja brez pokrova pa je

$$S = \pi r^2 + 2\pi r h = 6\pi.$$

Pogoj preoblikujemo:

$$r^2 + 2rh = 6.$$

Definiramo funkcijo:

$$\mathcal{L}(r, h, \lambda) = \pi r^2 h - \lambda(\pi r^2 + 2\pi r h - 6\pi).$$

Odvodi po spremenljivkah:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} &= 2\pi r h - \lambda(2\pi r + 2\pi h) = 0, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h} &= \pi r^2 - \lambda(2\pi r) = 0, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} &= -(\pi r^2 + 2\pi r h - 6\pi) = 0. \end{aligned}$$

Iz druge enačbe sledi:

$$\pi r^2 = 2\pi r \lambda \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{r}{2}.$$

Vstavimo v prvo enačbo:

$$\begin{aligned} 2\pi r h &= \frac{r}{2}(2\pi r + 2\pi h) = \pi r(r + h), \\ 2rh &= r(r + h), \\ 2h &= r + h \quad \Rightarrow \quad h = r. \end{aligned}$$

Vstavimo v pogoj:

$$r^2 + 2rh = 6 \quad \text{ker } h = r \Rightarrow r^2 + 2r^2 = 3r^2 = 6,$$

$$r^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt{2}, \quad h = \sqrt{2}.$$

**Odgovor:** Valj z največjim volumnom ima

$$\boxed{r = \sqrt{2}, \quad h = \sqrt{2}}.$$

4. [5T] Koliko je rešitev diferencialne enačbe $y'' + 6y' + 9y = 0$ z danimi začetnimi pogoji $y(0) = 0$ in $y'(0) = 1$?

$$a)\ e^{-3x} \quad b)\ -3e^{-3x} \quad c)\ -3xe^{x} \quad d)\ \underline{xe^{-3x}} \quad e)\ -3e^{x}$$

5. [5T]

Koliko je rang matrike

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}?$$

$$a)\ 0 \quad b)\ 1 \quad c)\ 2 \quad d)\ \underline{3} \quad e)\ 4$$

6. [5T] Katero izmed spodnjih števil leži v območju konvergence potenčne vrste

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} \left(x - \frac{3}{2}\right)^n ?$$

$$a)\ -5 \quad b)\ -2 \quad c)\ \underline{1} \quad d)\ 4 \quad e)\ 7 \quad f)\ 10$$

7. [5T]

Koliko mora biti konstanta $a$, da bodo točke $A(1,1,1)$, $B(2,4,1)$, $C(a,2,3)$ in $D(-1,-3,2)$ ležale na isti ravnini?

$$a)\ -2 \quad b)\ -1 \quad c)\ \underline{0} \quad d)\ 1 \quad e)\ 2$$

8. [5T]

Katera izmed spodnjih točk je stacionarna točka funkcije

$$f(x,y) = 1 + \ln(2x + xy + y^2)?$$

$$a)\ (0,1) \quad b)\ (1,-1) \quad c)\ (2,-1) \quad d)\ (3,-2) \quad e)\ \underline{(4,-2)}$$

KOLOKVIJ iz MATEMATIKE II
Univerzitetni študij

8. april 2025

1. [10T] Izračunajte volumen piramide, ki ima oglišča $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,1)$ in $D(1,1,1)$.

   Rešitev: $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

2. [10T] Izračunaj razdaljo med ravninama

$$x+2y+3z=0 \quad \text{in} \quad x+2y+3z=1.$$

   Rešitev: ta razdalja je enaka razdalji med $(0,0,0)$ in ravnino $x+2y+3z=1$, ki je enaka $\frac{1}{\sqrt{14}}$.

3. [15T] Določite neko lastno vrednost matrike

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

   ter izračunajte pripadajoči lastni vektor.

   Rešitev: vidimo, da je lastna vrednost $\lambda=4$, saj sta v determinanti

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ -3 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

   prva in tretja vrstica enaki. Pripadajoči lastni vektor je enak $(-1,2,5)$.

4. [15T] Za katere parametre $a\in\mathbb{R}$ so vektorji $(a,1,2,3)$, $(4,a,4,6)$ ter $(1,1,1,1)$ linearno odvisni?

   Rešitev: izračunati je potrebno rang matrike

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 2 & 3 \\ 4 & a & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

   ki je 2, če je $a=2$, drugače pa je enak 3. Tako je odgovor samo za $a=2$.

5. [25T]

a) Obravnavajte število rešitev sistema linearnih enačb

$$kx + 2ky - z = 2$$

$$kx = 9$$

$$x + 2y + z = 1$$

glede na vrednost parametra $k \in \mathbb{R}$.

b) Za $k = 1$ rešite sistem enačb.

Rešitev: Ko zamenjamo prvo in tretjo enačbo in nato še prvi tretji stolpec, ter nato še drugo in tretjo vrstico, dobimo sistem

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2k & k & 2 \\ 0 & 0 & k & 9 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{lcr|r} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2+2k & k+1 & 3 \\ 0 & 0 & k & 9 \end{array}\right],$$

kjer prvi stolpec predstavlja spremenljivko $z$, drugi stolpec spremenljivko $y$ in tretji stolpec spremenljivko $x$. Tako vidimo, da sistem nima rešitve za $k = 0$ in $k = -1$, za vse preostale $k$ pa imamo natanko eno rešitev. Za $k = 1$ dobimo rešitev $x = 9$, $z = -\frac{1}{2}$, $y = -\frac{15}{4}$.

6. [25T] Naj bo $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ linearna preslikava, ki preslika vektorje

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Naj bo $\mathcal{B} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ linearna preslikava, podana s predpisom

$$\mathcal{B}(v) = w \times v,$$

kjer je $w = (0, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$. Naj bo $\mathcal{C}$ linearna preslikava, ki ji v standardni bazi pripada matrika

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Določite matriki, ki pripadata linearnima preslikavama $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ v standardnih bazah in določite njuna ranga.

(b) Kam linearna preslikava $\mathcal{C}$ preslika vektor $(2, 2, 1)$?

(c) Kateri vektorji se preslikajo v vektor $(1, -1, 1)$ s preslikavo $\mathcal{C}$?

(d) Če obstaja, zapišite matriko v standardni bazi, ki pripada kompozitumu $\mathcal{C} \circ \mathcal{C}$. Odgovor utemeljite.

Rešitev:

a) vidimo, da velja

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

b) Vektor $(\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$.

c) V vektor $(9, 3, 2)$.

d) Matrika, ki pripada $\mathcal{C} \circ \mathcal{C}$ je

$$C^2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 11 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

# IZPIT iz MATEMATIKE II
## Univerzitetni študij

27. junij 2024

Prve tri naloge so standardnega tipa in vredne vsaka 25 točk. Zadnjih pet nalog je izbirnega tipa, pri čemer je pravilen natanko en odgovor, ki prinese 5 točk, nepravilen pa minus 1 točko. Neodgovorjena naloga prinese 0 točk, obkrožen več kot en odgovor pa minus 1 točko. Odgovorite tako, da obkrožite črko pred pravilnim odgovorom.

1. [25T]

   - Določite območje konvergence potenčne vrste
   $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}(2x+6)^n.$$
   - Razvijte funkcijo $f(x) = \frac{2}{x-3}$ v Taylorjevo vrsto okrog točke $x = 0$ in določite njen konvergenčni polmer.

   Rešitev: $a_n = \frac{(-1)^n}{n}2^n$ in $a = -3$. Izračunamo $R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \frac{1}{2}$, torej vrsta konvergira za $x \in (-\frac{7}{2}, -\frac{5}{2})$. Preverimo še robne pogoje: za $x = -\frac{5}{2}$ : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ konvergira (alt. harm. vrsta). Za $x = -\frac{5}{2}$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergira (harm. vrsta). Torej vrsta konvergira za $x \in (-\frac{7}{2}, -\frac{5}{2}]$.
   Velja
   $$f(x) = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\frac{x}{3}-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3^n})x^n.$$
   Konvergenčni polmer je enak 3.

2. [25T] Izračunajte lastne vrednosti in pripadajoče lastne vektorje matrike
   $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   Rešitev: Lastne vrednosti so $0, 1, 2$, pripadajoči lastni vektorji pa $(1, -1, 1)$, $(-1, -1, 1)$, $(0, -1, 2)$.

3. [25T] Temperatura (merjena v stopinjah Celzija, ena enota je 0.1 stopinj Celzija) na gladini jezera, ki ima obliko elipse $x^2 + 2y^2 \leq 10$, je podana s funkcijo $f(x, y) = x^2 + (y - 1)^2 + 10$.

   - Določi in klasificiraj stacionarne točke funkcije $f$.
   - V kateri točki na jezeru je temperatura največja in v kateri je najmanjša?

   Rešitev: Lagrangeova funkcija je

   $$F(x, y, \lambda) = x^2 + (y - 1)^2 + 10 - \lambda(x^2 + 2y^2 - 10),$$

   njene stacionarne točke pa so

   $$T_1(-2\sqrt{2}, -1), \quad T_2(2\sqrt{2}, -1), \quad T_3(0, -\sqrt{5}), \quad T_4(0, \sqrt{5}).$$

   Stacionarna točka $f$ v notranjosti elipse pa je $T(0, 1)$.
   Poračunamo še $f(T) = 10$, $f(T_1) = f(T_2) = 22$, $f(T_3) = (-1 - \sqrt{5})^2 + 10$ ter $f(T_4) = (-1 + \sqrt{5})^2 + 10$. Največja vrednost je torej v točkah $T_1$ in $T_2$, najmanjša pa v točki $T$.

4. [5T] Kaj je rešitev diferencialne enačbe $y'' + 6y' + 9y = 0$ z danimi začetnimi pogoji $y(0) = 0$ in $y'(0) = 1$?

   *a*) $e^{-3x}$ *b*) $-3e^{-3x}$ *c*) $-3xe^{x}$ *d*) $\underline{xe^{-3x}}$ *e*) $-3e^{x}$ *f*) $-xe^{-3x}$

5. [5T]
   Koliko je rang matrike

   $$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}?$$

   *a*) 0 *b*) 1 *c*) 2 *d*) $\underline{3}$ *e*) 4 *f*) 5

6. [5T] Kaj je rešitev diferencialne enačbe $(x^2+1)y' - 2xy = 0$ z začetnim pogojem $y(0) = 1$?

   *a*) 0 *b*) 1 *c*) $x + 1$ *d*) $\underline{x^2 + 1}$ *e*) $x^3 + 1$ *f*) $x^4 + 1$

7. [5T]

Koliko mora biti konstanta $a$, da bodo točke $A(a,1,1)$, $B(2,4,1)$, $C(0,2,3)$ in $D(-a,-3,2)$ ležale na isti ravnini?

$a)\ -2 \quad b)\ -1 \quad c)\ 0 \quad d)\ \underline{1} \quad e)\ 2 \quad f)\ 3$

8. [5T]

Katera izmed spodnjih točk je stacionarna točka funkcije

$$f(x,y) = 1 + \ln((x+1)^2 + xy + y)?$$

$a)\ \underline{(-1,0)} \quad b)\ (1,-1) \quad c)\ (2,-1) \quad d)\ (3,-2) \quad e)\ (4,-2) \quad f)\ (5,-3)$

KOLOKVIJ iz MATEMATIKE II
Univerzitetni študij

15. april 2024

1. [10T] Izračunajte razdaljo med ravninama $2x + 3y + 4z = 2$ in $2x + 3y + 4z = 0$.

   Rešitev: Razdalja med danima ravninama je enaka razdalji med ravnino $2x+3y+4z = 2$ ter točko $(0, 0, 0)$, ki pa je enaka $\frac{2}{\sqrt{4+9+16}} = \frac{2}{\sqrt{29}}$.

2. [10T] Določite parameter $a \in \mathbb{R}$, tako da bodo vektorji

$$(1, 1, a, 1),\ (3 - a, 1, 4 - a, 1),\ (1, 2, 3, 1) \in \mathbb{R}^4$$

   linearno odvisni.

   Rešitev: $a = 2$, saj sta v tem primeru prva dva vektorja enaka.

3. [15T] Ali so vektorji $x_1 = (1, 0, 1), x_2 = (1, 1, 0), x_3 = (0, 1, 1)$ baza vektorskega prostora $\mathbb{R}^3$? Odgovor utemeljite! Če je mogoče, zapišite vektor $(3, 5, 4)$ kot linearno kombinacijo danih vektorjev $x_1, x_2, x_3$.

   Rešitev: So baza, ker so linearno neodvisni in preko rešitve linearnega sistema dobimo $(3, 5, 4) = (1, 0, 1) + 2(1, 1, 0) + 3(0, 1, 1)$.

4. [15T] Določite realno lastno vrednost matrike

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

   ter poračunajte pripadajoči lastni vektor.

   Rešitev: takoj opazimo, da je $\lambda = 1$ lastna vrednost, ker sta prva in tretja vrstica matrike

$$A = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

   za $\lambda = 1$, enaki. Njen pripadajoči lastni vektor je $(0, -1, 1)$.

5. [25T] Letalo in helikopter po ravni črti letita proti pristajalni stezi, ki ima obliko ravnine, na kateri ležijo točke $A(4,3,1)$, $B(2,1,0)$ ter $C(1,2,0)$. Helikopter se nahaja v točki $(-1,5,5)$ in leti pravokotno na ravnino. Letalo se nahaja v točki $(2,0,1)$ ter se giblje po premici, ki je presek ravnin, podanih z enačbama $x-y+z=3$ in $x-2z=0$. V katerih točkah pristaneta helikopter in letalo ter pod kakšnim kotom leti letalo? Koliko sta helikopter in letalo v začetni poziciji oddaljeni od pristajalne steze?

   Rešitev: Pristajalna steza ima obliko ravnine z enačbo $-x-y+4z=-3$, saj je normala te ravnine vektorski produkt vektorjev $\vec{BA}=(2,2,1)$ ter $\vec{CB}=(-1,1,0)$, kar je ravno $\vec{n}=(-1,-1,4)$. Projekcijo točke $(-1,5,5)$ na dano ravnino dobimo s presekom premice, ki poteka skozi točko $(-1,5,5)$ in ima smerni vektor enak $\vec{n}$, ter dane ravnine. Ta točka je enaka $(-1+t,5+t,5-4t)$, ko vstavimo $t=\frac{19}{18}$.

   Letalo pa se giblje po premici, ki je v parametrični enačbi podana z $x=2t$, $y=3t-3$, $z=t$. Dobimo, da je presek z dano ravnino pristajalne steze pri $t=6$, torej v točki $(12,15,6)$. Kot med $\vec{n}$ ter smernim vektorjem druge premice $\vec{s}=(2,3,1)$ je enak

$$\arccos\left(\frac{\vec{n}\cdot\vec{s}}{\sqrt{18}\sqrt{14}}\right)=\arccos\left(\frac{1}{6\sqrt{7}}\right),$$

   torej dobimo ostri kot, kar pomeni, da je naš iskani kot enak $\frac{\pi}{2}-\arccos(\frac{1}{6\sqrt{7}})$.

   Helikopter je oddaljen za $\frac{19}{\sqrt{18}}$, letalo pa za $\frac{5}{\sqrt{18}}$ od pristajalne steze.

6. [25T]

   a) Obravnavajte število rešitev sistema linearnih enačb

$$x+2y+z=1$$
$$(k+2)x+7y+2z=4$$
$$(k^2+2k-1)x+5y+z=k+2$$

   glede na vrednost parametra $k\in\mathbb{R}$.

   b) Za $k=0$ rešite sistem enačb.

   Rešitev:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 7 & k+2 & 4 \\ 1 & 5 & k^2+2k-1 & k+2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & k & 2 \\ 0 & 3 & k^2+2k-2 & k+1 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & k & 2 \\ 0 & 0 & (k+2)(k-1) & k-1 \end{array}\right],$$

kjer prvi stolpec predstavlja spremenljivko $z$, drugi stolpec spremenljivko $y$ in tretji stolpec spremenljivko $x$. Pri prvi operaciji smo uporabili $v_2 - 2v_1$ ter $v_3 - v_1$ pri drugi operaciji pa $v_3 - v_2$. Opazimo, da ima sistem eno-parametrično rešitev za $k = 1$ ter nima rešitve za $k = -2$. Za vse preostale $k$-je pa ima natanko eno rešitev. Za $k = 0$ je ta rešitev enaka $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{2}{3}$, $z = -\frac{5}{6}$.

KOLOKVIJ iz MATEMATIKE II
Univerzitetni študij

14. april 2023

1. [10T] Za katere $t \in \mathbb{R}$ so vektorji $(1, 2, -1)$, $(3, 2, 1)$ in $(0, t, 1)$ linearno neodvisni?

   Rešitev: Determinanta je enaka $-4 - 4t$, torej za $t \neq -1$.

2. [10T] Izračunajte lastne vrednosti matrike
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},$$
   ter zapišite lastni vektor, ki pripada največji lastni vrednosti.

   Rešitev: Lastni vrednosti sta $2 \pm \sqrt{3}$, lastni vektor, ki pripada lastni vrednosti $2 + \sqrt{3}$ pa je enak $(-1 + \sqrt{3}, 1)$.

3. [15T] Za katero matriko $X$ velja enačba $AX = B$, kjer sta matriki $A$ in $B$ enaki
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
   Rešitev:
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. [15T] Želimo zgraditi tristrano piramido s prostornino $12\,\mathrm{m}^3$. Osnovna ploskev piramide ima oglišča
$$A(-2, 2, -1), B(2, -1, -3), C(3, -3, 1).$$
   Zadnje oglišče $D$ želimo imeti na premici
$$x = 2 - t, \quad y = 3 + 2t, \quad z = 1, \quad t \in \mathbb{R}.$$
   Katere točke lahko vzamemo za oglišče $D$?

   Rešitev: Naj bo $D$ točka na dani premici, torej velja
$$D = (2 - t, 3 + 2t, 1).$$

Izračunamo $\vec{AD} = (4-t, 1+2t, 2)$, $\vec{AB} = (4,-3,-2)$ ter $\vec{AC} = (5,-5,2)$. Absolutna vrednost mešanega produkta $|(\vec{AD}, \vec{AB}), \vec{AC}|$ je enaka $|-92-20t|$, torej rešujemo enačbo $|-92-20t| = 6 \cdot 12$, ki ima dve rešitvi: $t_1 = -1$ ter $t_2 = -\frac{41}{5}$. Ti dve rešitvi vstavimo v točko $D$ in dobimo dve rešitvi $D_1(3,1,1)$ in $D_2(2+\frac{41}{5}, 3-\frac{82}{5}, 1)$.

5. [25T]

   a) Obravnavajte število rešitev sistema linearnih enačb

$$x + ky - 2z = 1$$

$$kx + 3z + 2y = 2$$

$$x + 4y - 3z = 6$$

   glede na vrednost parametra $k \in \mathbb{R}$.

   b) Za $k = 0$ rešite sistem enačb.

Rešitev: Ko zamenjamo prvo in tretjo enačbo dobimo sistem

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -3 & 6 \\ k & 2 & 3 & 2 \\ 1 & k & -2 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -3 & 4 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & k & 2 \\ -2 & k & 1 & 1 \end{array}\right],$$

kjer prvi stolpec predstavlja spremenljivko $z$, drugi stolpec spremenljivko $y$ in tretji stolpec spremenljivko $x$. Po Gaussovi eliminaciji dobimo

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} -3 & 4 & 1 & 6 \\ 0 & 6 & k+1 & 8 \\ 0 & 3k-8 & 1 & -9 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & \frac{k+1}{6} & \frac{8}{6} \\ 0 & 0 & x_1 & x_2 \end{array}\right],$$

kjer $x_1 = -3k^2 + 5k + 14$, kar pomeni, da sistem nima rešitve za $k_1 = \frac{1}{6}(5 - \sqrt{193})$, $k_2 = \frac{1}{6}(5 + \sqrt{193})$ (kar sta ničli $x_1$ in nista ničli $x_2$), za vse preostale $k$ pa imamo natanko eno rešitev.

Za $k = 0$ dobimo rešitev $x = \frac{5}{7}$, $y = \frac{17}{14}$, $z = -\frac{1}{7}$.

6. [25T] Naj bo $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ linearna preslikava, ki preslika vektorje

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Naj bo $\mathcal{B} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ linearna preslikava, podana s predpisom

$$\mathcal{B}(v) = w \times v,$$

kjer je $w = (1,1,0) \in \mathbb{R}^3$.

(a) Določite matriki, ki pripadata linearnima preslikavama $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ v standardnih bazah in določi njuna ranga.

(b) Kam linearna preslikava $\mathcal{A}$ preslika vektor $(2, 2, 1)$?

(c) Kateri vektorji se preslikajo v vektor $(1, -1, 1)$ s preslikavo $\mathcal{B}$?

(d) Če obstaja, zapišite matriko v standardni bazi, ki pripada kompozitumu $\mathcal{A} \circ \mathcal{B}$. Odgovor utemeljite.

Rešitev: vidimo

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 2 & \frac{1}{2} & -4 \end{pmatrix}$$

odgovor pri b) v vektor $(1, 1) + (3, 0) = (4, 1)$. Odgovor pri c) vektorji $(x, 1+x, 1)$, $x \in \mathbb{R}$. Matrika, ki pripada $\mathcal{A} \circ \mathcal{B}$ je produkt matrik $A \cdot B$.

IZPIT iz MATEMATIKE II
Univerzitetni študij

29. junij 2022

Prve tri naloge so standardnega tipa in vredne vsaka 25 točk. Zadnjih pet nalog je izbirnega tipa, pri čemer je pravilen natanko en odgovor, ki prinese 5 točk, nepravilen pa minus 1 točko. Neodgovorjena naloga prinese 0 točk, obkrožen več kot en odgovor pa minus 1 točko. Odgovorite tako, da obkrožite črko pred pravilnim odgovorom.

1. [25T]

   Za katere $k \in \mathbb{R}$ ima spodnji sistem linearnih enačb rešitev?

$$4x + ky - 10z = -8$$
$$x + 2y + kz = 1$$
$$3x + ky - 6z = -5.$$

   Poišči rešitev za $k = 1$.

   Rešitev: Če prvi vrstici odštejemo zadnjo dobimo sistem

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & | & -3 \\ 1 & 2 & k & | & 1 \\ 3 & k & -6 & | & -5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & | & -3 \\ 0 & 2 & k+4 & | & 4 \\ 0 & k & 6 & | & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & | & -3 \\ 0 & 2 & k+4 & | & 4 \\ 0 & 0 & (k+6)(k-2) & | & 4(k-2) \end{bmatrix}$$

   Tako vidimo, da za $k = -6$ sistem nima rešitve, za $k = 2$ ima neskončno rešitev, za preostale $k$ pa ima natanko eno rešitev. Za $k = 1$ ima sistem rešitev $x = \frac{-5}{7}$, $y = \frac{4}{7}$, $z = \frac{4}{7}$.

2. [25T]

   Funkcija $f(x, y) = x^2 + x + 6y^2 + 5$ predstavlja višino makete, ki se nahaja nad elipso $\frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1$. V kateri točki je višina makete največja in v kateri najmanjša? Ena enota v koordinatnem sistemu je en decimeter.

   Rešitev: Stacionarna točka v notranjosti je $(-\frac{1}{2}, 0)$. Lagrangeova funkcija je

$$F(x, y, \lambda) = x^2 + x + 6y^2 + 5 - \lambda(\frac{x^2}{4} + y^2 - 1).$$

   Rešitev sistema enačb

$$F_x = 2x + 1 - \frac{\lambda x}{2} = 0$$

$$F_y = 12y - 2\lambda y = 0$$
$$F_\lambda = \frac{x^2}{4} + y^2 - 1 = 0$$

pa nam da točke $(-2, 0)$, $(2, 0)$, $(1, -\frac{\sqrt{3}}{2})$, $(1, \frac{\sqrt{3}}{2})$: ločimo dva primera pri $F_y = 0$: prvi je $y = 0$ kar nam da prvi dve točki, drugi pa je $\lambda = 6$, kar nam da $x = 1$ iz $F_x = 0$, iz česar dobimo preostali dve točki. Največja višina je torej pri točkah $(1, -\frac{\sqrt{3}}{2})$, $(1, \frac{\sqrt{3}}{2})$ (enaka $\frac{23}{2}$), najmanjša pa pri točki $(-\frac{1}{2}, 0)$ (enaka $\frac{19}{4}$).

3. [25T]

   Poiščite rešitev diferencialne enačbe
$$y' - \frac{2y}{x} = x^2 \ln(x)$$
   pri začetnem pogoju $y(1) = 0$.

   Rešitev: Najprej poiščemo rešitev homogenega dela
$$y' - \frac{2y}{x} = 0$$
   in dobimo $\frac{dy}{y} = \frac{2dx}{x}$ in po integriranju dobimo rešitev $y_h = x^2C$. Z variacijo konstante dobimo partikularno rešitev $y_p = x^2C(x)$. Izraz $y_p' - \frac{y_p}{x} = x^2\ln(x)$ se poenostavi v
$$C'(x) = \ln(x),$$
   torej $C(x) = -x + x\ln(x)$, kar sledi z uporabo per-partesa ($u = \ln(x)$, $dv = dx$). Iz tega sledi, da je rešitev enaka $x^2C + x^3(\ln(x) - 1)$, ko upoštevamo še začetni pogoj dobimo $C = 1$, kar pomeni, da je naša rešitev enaka $y(x) = x^2 + x^3(\ln(x) - 1)$.

4. [5T] Kateri izmed spodnjih vektorjev je lastni vektor, ki pripada lastni vrednosti 2 od matrike
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}?$$

   *a*) $(1, 1, 1)$ *b*) $\underline{(1, 2, 1)}$ *c*) $(1, 3, 1)$ *d*) $(1, 4, 1)$ *e*) $(1, 5, 1)$

5. [5T] Koliko je rešitev diferencialne enačbe $y'' + 2y' + y = 0$, z danimi začetnimi pogoji $y(0) = 0$ in $y'(0) = 2$?

   *a*) $e^{-x}x$ *b*) $\underline{2e^{-x}x}$ *c*) $e^{-2x}x$ *d*) $2e^{-2x}x$ *e*) $e^{-x} + e^x$

6. [5T]

Koliko je rang matrike

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}?$$

*a*) 0 *b*) 1 *c*) 2 *d*) $\underline{3}$ *e*) 4

7. [5T]

Katero izmed spodnjih števil leži v območju konvergence potenčne vrste

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-1)^n}{n}?$$

*a*) $\underline{0}$ *b*) 1 *c*) 2 *d*) 3 *e*) 4

8. [5T]

Dana je linearna preslikava $\mathcal{A}(x, y, z) = (x+y, y-x+z)$. Kateri izmed spodnjih vektorjev se s to preslikavo preslika v vektor $(2, 1)$?

*a*) $\underline{(1, 1, 1)}$ *b*) $(2, 1, 1)$ *c*) $(3, 1, 1)$ *d*) $(4, 1, 1)$ *e*) $(5, 1, 1)$

IZPIT iz MATEMATIKE II
Univerzitetni študij

15. junij 2022

Prve tri naloge so standardnega tipa in vredne vsaka 25 točk. Zadnjih pet nalog je izbirnega tipa, pri čemer je pravilen natanko en odgovor, ki prinese 5 točk, nepravilen pa minus 1 točko. Neodgovorjena naloga prinese 0 točk, obkrožen več kot en odgovor pa minus 1 točko. Odgovorite tako, da obkrožite črko pred pravilnim odgovorom.

1. [25T]

   Za katere $k \in \mathbb{R}$ ima spodnji sistem linearnih enačb rešitev?

$$kx + 2y + 3z = 2$$

$$3x + 2y - z = 8$$

$$x - y - 2z = 1$$

   Poišči rešitev za $k = 3$.

   Rešitev: z Gaussovo eliminacijo dobimo, da za $k = -1$ sistem nima rešitev, za $k \neq -1$ ima enolično rešitev, ki je za $k = 3$ enaka $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{5}{2}$ in $z = -\frac{3}{2}$.

2. [25T] Gozdna pot ima obliko elipse

$$\frac{(x+1)^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

   Nahajamo se v gozdu na točki $(-1, 1)$ in se po najkrajši možni poti odpravimo proti gozdni poti. V katero točko na poti pridemo ter koliko poti prehodimo? Ena enota v koordinatnem sistemu je en kilometer.

   Rešitev: Razdalja od točke $T(-1, 1)$ do poljubne točke na elipsi je enaka $\sqrt{(x+1)^2 + (y-1)^2}$ in brez škode za splošnost lahko za iskanje minimuma vzamemo kvadrat razdalje. Tako dobimo Lagrangeovo funkcijo

$$F(x, y, \lambda) = (x+1)^2 + (y-1)^2 - \lambda\Big(\frac{(x+1)^2}{4} + \frac{y^2}{9} - 1\Big).$$

   Ko rešimo sistem enačb

$$F_x = F_y = F_\lambda = 0$$

dobimo stacionarne točke

$$T_1(-4,0),\ T_2(-\frac{14}{5},-\frac{8}{5}),\ T_3(\frac{-14}{5},\frac{8}{5}),\ T_4(2,0),$$

od katerih sta $T_2$ in $T_3$ najmanj oddaljeni od $T$. Ta razdalja je $\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$.

3. [25T]

Poiščite rešitev diferencialne enačbe

$$y' - 2xy = x^3$$

pri začetnem pogoju $y(0) = 1$.

Rešitev: Najprej poiščemo rešitev homogenega dela

$$y' - 2xy = 0$$

in dobimo $\frac{dy}{y} = 2xdx$ in po integriranju dobimo rešitev $y_h = Ce^{x^2}$. Z variacijo konstante dobimo partikularno rešitev $y_p = C(x)e^{x^2}$. Izraz $y_p' - 2xy_p = x^3$ se poenostavi v

$$C'(x) = x^3e^{-x^2},$$

kar rešimo z uvedbo nove spremenljivke $t = x^3$. Na koncu dobimo rešitev $y = -\frac{1}{2}(1+x^2) + Ce^{x^2}$ in ko vstavimo začetni pogoj $y(0) = 1$ dobimo $C = \frac{3}{2}$.

4. [5T] Katera je lastna vrednost matrike

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}?$$

$a)\ -1 \quad b)\ \underline{-2} \quad c)\ -3 \quad d)\ -4 \quad e)\ -5$

5. [5T] Koliko je rešitev diferencialne enačbe $x^2y'' + xy' - 4y = 0$, z danimi začetnimi pogoji $y(1) = 0$ in $y(2) = 15$?

$a)\ -\frac{2}{x^3}+2x^3 \quad b)\ -\frac{4}{x^3}+4x^3 \quad c)\ -\frac{2}{x^2}+2x^2 \quad d)\ \underline{-\frac{4}{x^2}+4x^2} \quad e)\ -\frac{2}{x^2}+2x^2\ln x$

6. [5T]

   Koliko je rang matrike

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -4 & -6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}?$$

$$a)\ 0 \quad b)\ \underline{1} \quad c)\ 2 \quad d)\ 3 \quad e)\ 4$$

7. [5T]

   Kateri izmed spodnjih intervalov je območje konvergence potenčne vrste

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n-4}?$$

$$a)\ (2,4] \quad b)\ (2,4) \quad c)\ \underline{[2,4)} \quad d)\ (2,4] \quad e)\ (3,4]$$

8. [5T]

   Dana je linearna preslikava $\mathcal{A}(x,y,z) = (2x+y, y-z)$. Naj bo $A$ pripadajoča matrika linearne preslikave $\mathcal{A}$ in naj bo matrika

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

   Koliko je produkt $A \cdot B$?

$$a)\ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \underline{b)}\ \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad c)\ \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad d)\ \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad e)\ \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

KOLOKVIJ iz MATEMATIKE II
Univerzitetni študij

30. maj 2022

1. [10T] Rešite diferencialno enačbo

$$x^2y'' + 2xy' = 6y,$$

pri pogojih $y(1) = 0$ ter $y(-1) = 1$.

Rešitev: nastavek $y = x^\lambda$ nam da karakteristično enačbo $\lambda(\lambda - 1) + 2\lambda - 6 = (\lambda - 2)(\lambda + 3)$, torej je rešitev oblike

$$Ax^{-3} + Bx^2.$$

Ko vstavimo pogoje dobimo $A = -\frac{1}{2}$ ter $B = \frac{1}{2}$.

2. [10T] Naj bo $F(x)$ Fourierova vrsta periodične funkcije

$$f(x) = \begin{cases} 1 & ; 0 \leq x < 1 \\ x^3 + 2 & ; 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

s periodo $2\pi$. Približno skicirajte $F(x)$ na intervalu $[-3\pi, 3\pi]$ in izračunajte koliko je $F(2\pi)$.

Rešitev: $F(x) = f(x)$ za vse $x$ razen za tiste $x$, kjer $f$ ni zvezna. Tam je $F(x)$ povprečna vrednost leve in desne limite od $f$. Tako je $F(2\pi) = F(0) = \frac{-1+2}{2} = \frac{1}{2}$.

3. [15T] Razvijte funkcijo $f(x) = \frac{2}{x-3} - \frac{2}{x-2}$ v Taylorjevo vrsto okrog točke $x = 0$ in določi njen konvergenčni polmer.

Rešitev: Velja

$$f(x) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\frac{x}{3} - 1} - \frac{1}{\frac{x}{2} - 1}.$$

Ti dve vrsti pa razvijemo v geometrijsko vrsto in dobimo

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3^n} + \frac{1}{2^n})x^n.$$

Konvergenčni polmer je enak 2.

4. [15T] Določite območje konvergence potenčne vrste

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}(2x+3)^n.$$

Rešitev: Velja $\frac{(-1)^n}{n}(2x+3)^n = \frac{(-1)^n}{n}2^n(x+\frac{3}{2})^n$, torej je $a_n = \frac{(-1)^n}{n}2^n$ in $a = -\frac{3}{2}$. Izračunamo $R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \frac{1}{2}$, torej vrsta konvergira za $x \in (-2,-1)$. Preverimo še robne pogoje: za $x = -1$ : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ konvergira (alt. harm. vrsta). Za $x = -2$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergira (harm. vrsta). Torej vrsta konvergira za $x \in (-2,-1]$.

5. [25T] Poiščite rešitev diferencialne enačbe

$$y' - \frac{y}{x^2} = 2xe^{\frac{-1+x^3}{x}}$$

pri začetnem pogoju $y(1) = 0$.

Rešitev: Najprej poiščemo rešitev homogenega dela

$$y' - \frac{y}{x^2} = 0$$

in dobimo $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x^2}$ in po integriranju dobimo rešitev $y_h = e^{-\frac{1}{x}}C$. Z variacijo konstante dobimo partikularno rešitev $y_p = e^{-\frac{1}{x}}C(x)$. Izraz $y_p' - \frac{y_p}{x^2} = 2xe^{\frac{-1+x^3}{x}}$ se poenostavi v

$$C'(x) = 2xe^{x^2}.$$

Vpeljava nove spremenljivke $t = e^{x^2}$ nam da $C(x) = \int 2xe^{x^2}dx = e^{x^2}$, torej je rešitev enaka $e^{-\frac{1}{x}}C + e^{x^2-\frac{1}{x}}$, ko upoštevamo še začetni pogoj dobimo $C = -e$, kar pomeni, da je naša rešitev enaka $y(x) = -e^{-\frac{1}{x}+1} + e^{x^2-\frac{1}{x}}$.

6. [25T] Temperatura na kovinski krogli $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$, je podana s funkcijo $f(x,y,z) = x^2 + y$. V kateri točki na robu te krogle je temperatura največja in v kateri je najmanjša?

Rešitev: Lagrangeva funkcija je

$$F(x,y,z,\lambda) = x^2 + y - \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 4),$$

njene stacionarne točke pa so

$$T_1(0,-2,0), \quad T_2(-\frac{\sqrt{15}}{2}, \frac{1}{2}, 0), \quad T_3(\frac{\sqrt{15}}{2}, \frac{1}{2}, 0), \quad T_4(0,2,0).$$

Poračunamo še $f(T) = 1$, $f(T_1) = -2$, $f(T_2) = f(T_3) = \frac{19}{4}$ ter $f(T_4) = 2$. Največja vrednost je torej v točkah $T_2$ in $T_3$, najmanjša pa v točki $T_1$.

KOLOKVIJ iz MATEMATIKE II
Univerzitetni študij

8. april 2022

1. [10T] Izračunajte rang matrike

$$\begin{pmatrix} 7 & 3 & -3 \\ -21 & -7 & 8 \\ 7 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

   Ali je matrika obrnljiva? Odgovor utemeljite.

   Rešitev: Z Gaussovo eliminacijo dobimo, da je rang enak 2 in tako matrika ni obrnljiva.

2. [10T] Izračunajte lastne vrednosti matrike

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

   Rešitev:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ -2 & -1-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \cdots = (-1-\lambda)(\lambda^2+2)$$

   in tako so lastne vrednosti enake $-1$, $\sqrt{2}i$, $-\sqrt{2}i$.

3. [10T] Ali se da vektor $(2,-1,1)$ zapisati kot linearno kombinacijo vektorjev $(2,4,6)$ in $(-3,4,1)$? Če je mogoče poiščite tako linearno kombinacijo.

   Rešitev: z rešitvijo linearnega sistema dobimo

$$(2,-1,1) = \frac{1}{4}(2,4,6) - \frac{1}{2}(-3,4,1).$$

4. [10T] Izračunajte produkt matrik $A \cdot B$, kjer je $A$ matrika, ki pripada linearni preslikavi $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $\mathcal{A}(x,y,z) = (3x+y, 2y+3z)$, matrika $B$ pa je enaka

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Rešitev: matrika $A$ je enaka

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

in tako dobimo, da je

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 9 & 4 \end{pmatrix}$$

5. [10T] Izračunajte inverz matrike

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Rešitev:

$$A^{-1} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -1 & -3 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -6 \end{pmatrix}.$$

6. [25T]

   a) Obravnavajte število rešitev sistema linearnih enačb

$$x + ay - 7z = -4$$

$$2x + y + z = 13$$

$$x + 3y - 12z = -11$$

   glede na vrednost parametra $a \in \mathbb{R}$.

   b) Pri $a = 2$ rešite sistem enačb. Kaj geometrijsko predstavlja množica rešitev v tem primeru?

Rešitev: Ko zamenjamo prvo in tretjo enačbo dobimo za rešiti sistem

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -12 & 3 & -11 \\ 2 & 1 & 1 & 13 \\ 1 & -7 & a & -4 \end{array}\right],$$

kjer prvi stolpec predstavlja spremenljivko $x$, drugi stolpec spremenljivko $z$ in tretji stolpec spremenljivko $y$. Po Gaussovi eliminaciji dobimo

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -12 & 3 & -11 \\ 0 & 25 & -5 & 35 \\ 0 & 5 & a-3 & 7 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -12 & 3 & -11 \\ 0 & 5 & -1 & 7 \\ 0 & 5 & a-3 & 7 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -12 & 3 & -11 \\ 0 & 5 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & a-2 & 0 \end{array}\right].$$

za $a = 2$ imamo večparameterično rešitev, ki je enaka $x = -3t + 10$, $y = 5t - 7$, $z = t$, $t \in \mathbb{R}$ in tako rešitev predstavlja premico. Za preostale $a$ dobimo enolično rešitev.

7. [25T] Želimo zgraditi dve tristrani piramidi z oglišči $A(0,0,0)$, $B(1,2,0)$ ter $C(1,0,2)$ v koordinatnem sistemu, kjer ena enota meri $1\,\mathrm{m}$.

   a) Prva piramida naj ima prostornino $10\,\mathrm{m}^3$. Kam moramo postaviti oglišče $D$, da bo to oglišče ležalo na premici
   $$x - 2 = y = \frac{z}{2}?$$

   b) Druga piramida naj ima oglišče $D(0,1,1)$. Koliko je višina skozi oglišče $A$?

Rešitev: Izračunamo

$$\overrightarrow{AB} = (1,2,0), \quad \overrightarrow{AC} = (1,0,2), \quad \overrightarrow{AD} = (k+2, k, 2k),$$

saj $D(k+2, k, 2k)$ za nek $k \in \mathbb{R}$. Velja

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ k+2 & k & 2k \end{vmatrix} = -2k + 8.$$

Rešitev enačbe $|-2k+8| = 6 \cdot V = 60$ je $k_1 = 34$, $k_2 = -26$ torej imamo dve možnosti za oglišče D in sicer $D_1(36, 34, 68)$ in $D_2(-24, -26, -52)$.

Pri drugi piramidi izračunamo

$$\overrightarrow{BC} = (0, -2, 2), \quad \overrightarrow{BD} = (-1, -1, 1), \quad \overrightarrow{BA} = (-1, -2, 0)$$

in tako

$$v_A = \frac{|(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BA})|}{|\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BD}|} = \sqrt{2}\,\mathrm{m}\,.$$

# IZPIT iz MATEMATIKE II
## Univerzitetni študij

9. februar 2022

Prve tri naloge so standardnega tipa in vredne vsaka 25 točk. Zadnjih pet nalog je izbirnega tipa, pri čemer je pravilen natanko en odgovor, ki prinese 5 točk, nepravilen pa minus 1 točko. Neodgovorjena naloga prinese 0 točk, obkrožen več kot en odgovor pa minus 1 točko. Odgovorite tako, da obkrožite črko pred pravilnim odgovorom.

1. [25T] Izračunajte lastne vrednosti matrike

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

   Izberite si dve lastni vrednosti in izračunajte pripadajoče lastne vektorje.

   Rešitev: Karakteristična enačba je enaka $-(1+\lambda)(2+\lambda^2)$, torej so lastne vrednosti enake $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = i\sqrt{2}$ ter $\lambda_3 = -i\sqrt{2}$. Poračunamo še njihove pripadajoče lastne vektorje, ki so enaki $(0, -1, 1)$, ki pripada $\lambda_1$, ter $\frac{1}{2}(-1 \pm i\sqrt{2})$, ki pripadata $\lambda_2$ ter $\lambda_3$.

2. [25T] Želimo zgraditi tristrano piramido s prostornino $1\,\mathrm{m}^3$ meter. Želimo, da ima osnovna ploskev koordinate oglišč $(1, 2, 0), (0, 3, 4), (2, 3, 0)$. Zadnje oglišče želimo imeti na premici

$$\frac{x-1}{2} = y - 1, \quad z = 2.$$

   Katero točko na podani premici moramo vzeti?

   Rešitev: Naj bo $D$ točka na dani premici, torej velja

$$D = (2a+1, a+1, 2).$$

   Izračunamo $A-D = (-2a, 1-a, -2)$, $A-B = (1, -1, -4)$ ter $A-C = (-1, -1, 0)$. Velja, da je $6V = 6$ enak absolutni vrednosti mešanega produkta vektorjev $A-D$, $A-B$ ter $A-C$. Dobimo enačbo $|8+4a| = 6$, ki nam da dve rešitvi: $a_1 = -\frac{7}{2}$ ter $a_2 = -\frac{1}{2}$.

3. [25T]

   Poiščite rešitev diferencialne enačbe

$$y' - \frac{y}{x} = (2x^3 + 8x^2 + 6x)\ln x$$

   pri začetnem pogoju $y(1) = 0$.

   Rešitev: Najprej poiščemo rešitev homogenega dela

$$y' - \frac{y}{x} = 0$$

   in dobimo $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$ in po integriranju dobimo rešitev $y_h = xC$. Z variacijo konstante dobimo partikularno rešitev $y_p = xC(x)$. Izraz $y_p' - \frac{y_p}{x} = 2x(x+3)e^x$ se poenostavi v

$$C'(x) = 2(x^2 + 4x + 3)\ln x,$$

   torej $C(x) = \int 2(x^2+4x+3)\ln x dx$, integracija per partes z $u = \ln x$ in $dv = (x^2+4x+3)dx$ in upoštevanje začetnega pogoja nam da rešitev

$$y = \frac{2}{9}(37x - 27x^2 - 9x^3 - x^4 + 27x^2\ln x + 18x^3\ln x + 3x^4\ln x).$$

4. [5T] Katera izmed spodnjih množic je definicijsko območje funckije dveh spremenljivk $f(x, y) = |x + y| - \arcsin\frac{x}{2}$

   a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \le x \le 1\}$
   b) $\underline{\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -2 \le x \le 2\}}$
   c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \le x \le 1,\ -1 \le y \le 1\}$
   d) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -2 \le x \le 2,\ -2 \le y \le 2\}$
   e) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \le y \le 1\}$

5. [5T]

   Koliko je rang matrike

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -4 & 2 \\ 3 & 6 & -3 \end{pmatrix}?$$

   *a)* 0 *b)* $\underline{1}$ *c)* 2 *d)* 3 *e)* 4

6. [5T] Za kateri $k$ spodnji sistem nima rešitve?

$$kx + 2y + 3z = 1,$$

$$x - y - 2z = 1,$$

$$x + 2y + z = 1.$$

a) -2 b) $\underline{-1}$ c) 0 d) 1 e) 2

7. [5T]

Kateri izmed spodnjih intervalov je območje konvergence potenčne vrste

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n+1}?$$

$a)$ $\underline{[-2, 0)}$ $b)$ $(-2, 0]$ $c)$ $(-2, 0)$ $d)$ $[0, 2)$ $e)$ $(0, 2]$

8. [5T]

Katera izmed spodnjih točk je stacionarna točka funkcije

$$f(x, y) = \ln(2x + xy + y^2)?$$

$a)$ $(0, 1)$ $b)$ $(1, -1)$ $c)$ $(2, -1)$ $d)$ $(3, -2)$ $e)$ $\underline{(4, -2)}$